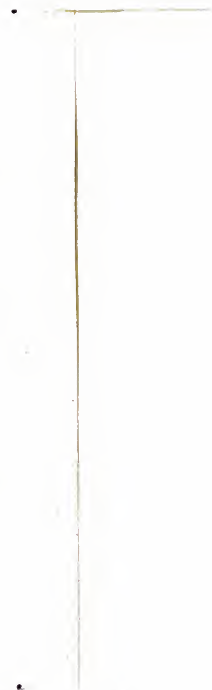
ELEMENTA MATHESEOS AD MECHANICAM PHILOSOPHIAM IN PRIVATIS...

Fortunato : da Brescia











ELEMENTA MATHESEOS



ELEMENTA MATHESEOS

AD MECHANICAM PHILOSOPHIAM

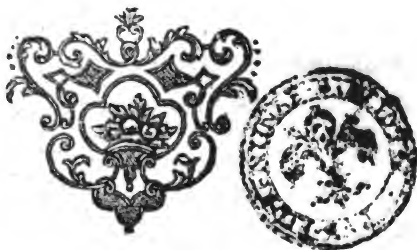
in privatis Scholis

TRADENDAM, ET COMPARANDAM ACCOMMODATA

AUCTORE

P. F. FORTUNATO A BRIXIA

Ord. Min. Prov. Brixiæ, Lect. Theol. Script. Ordinis, & in Brixiana Academia publ. Matheseos, & naturalis Philisophiæ Professore.



BRIXIÆ. MDCCLIX.

Ex Typographia JOANNIS-MARIÆ RIZZARDI

SUPERIORUM PERMISSU.

NOBILI ERUDITISSIMOQUE VIRO

COMITI
JOANNI - MARIAE MAZZUCHELLO
PATRICIO BRIXIANO

F. FORTUNATUS A BRIXIA MIN. REF.
F.

SI jus Artium liberalium, omniumque Disciplinarum est, COMES AMPLISSIME, *ut sibi summos Viros patronos & fautores quærant, non ea sane de causa, prudentum judicio, reprehendar, quod ausus sim, opusculum*

hoc, quodcunque est, Tuo nomine decorare. Cum enim ea hic Matheseos elementa contineantur, quæ ad Mechanicam Philosophiam in privatis scholis tradendam comparandamque necessaria apprime sunt, ad Te confugere visum est, qui studiis hisce gaudes, atque hæc foves, eorundemque dux & quasi auspex in florentissima hac Civitate facili judicaris. Testis est Academia, quam nuper domi Tuæ aperuisti. Huc enim Viri optimarum artium studiis eruditi confluentes, quas Tibi gratissimas vident esse, Physico-Mechanicas Dissertationes sæpissime proferunt, earumque Te laudatorem cum habeant, hujus disciplinæ culturam mirifice omnibus commendatam intuentur. Quis autem dubitet, quin Urbs ista multum Tibi debeat, qui juventutem præsertim ad sui ingenii fœtus prodendos alli-

liciens, illud evicisti, ut minus jam, quam ante, otio & segnitie diffluat, majorisque laudis amore tangatur? Verum hac de re satis; neque enim deerunt, VIR ERUDITISSIME, *qui consilium hoc Tuum, & institutum tam utile, tamque honestum melius ac prolixius laudent. At vero quid dicam de sanguinis dignitate, ceterisque fortunæ bonis, quæ Te spectatum reddunt, atque ut in lauta & bene aucta parte apud omnes pueris, plurimum faciunt? Non mediocriter quidem oculos sæpe atque animum percussit splendor familiæ Tuæ, præferentis in stemmate longam eorum seriem, qui de Patria, & de Republica benemeriti, utramque sibi militaribus officiis obstrinxerunt. Vivit & in omne ævum vivet, etiam post fata superstes,* EQUES FRIDERICUS *Pater Tuus, cujus eximiam animi pietatem, summam*

sa-

ſapientiam, atque prudentiam ſingularem, neque eſt hujus loci, neque ingenii celebrare. Hæc reputanti mirum ſane non accidet, ſi tanta in ſe merita æquus rerum æſtimator ac remunerator PRINCEPS SERENISSIMUS *amplis honoribus rependere & inſignire decrevit. Ut tamen verum fatear, non tam genus, & proavos, actaque Majorum, quam ea, quæ vere Tua ſunt, ego ſuſpexi probitatem ſcilicet morum, ſummum in proſperis rebus modum, atque in cujuſvis generis ſtudia amorem plane incredibilem. Tenet univerſa Civitas, quæ prima ac potior cura Tua ſit, literis nempe conſulendi & literatis. Norunt omnes, quanta in antiquis monumentis inveſtigandis Tua ſit ſolertia, quanta in illis explicandis claritas & elegantia, quantaque in nobilioribus Diſciplinis, atque in critica potiſſimum arte*

eru-

eruditio. Quis enim est, qui Tuum illum præclarum de Archimedis vita & scriptis *jam splendide editum, magnoque Eruditorum omnium plausu acceptum, libellum non miretur? Ecquis itidem est, qui summe non cupiat, ut quamcitissime publica fruatur luce alterum de* Vita Petri Aretini *nuper a Te conscriptum, Tuisque animadversionibus ornatum volumen? Quis demum, cui non sit in votis, quod jam paras, & cujus jam in vita prælo paratam tum* Petri Apponensis, *tum* Alamanni *eximium specimen propediem daturus es, ingens opus atque ipsa magnitudine pretiosum, de eorum* vita, scriptis, gestisque rebus, *qui ad hæc usque tempora in Italia floruerunt? His quidem de causis factum videmus, ut docti omnes eruditique Viri Te in deliciis habeant,*

Te

Te certatim extollant, ſuiſque ſcriptis Tuum nomen inſerere geſtiant: atque hæc ſunt, MECOENAS NOBILISSIME, *quæ Te mihi ſemper ſpectatiſſimum, me vero Tibi quammaxime obſtrictum reddiderunt: hæc, quæ impulerunt, ut Tibi uni libellum hunc inſcriberem, Tuorum in me magnorum meritorum, nec minoris meæ in Te obſervantiæ argumentum. Fac igitur, æquo animo accipias, mihique pergas bene velle, ut facis, quamvis nihil prorſus in me ſit, quod amorem Tuum mereri aliquo modo poſſe videatur. Vale.*

Dabam Brixiæ X. Kal. Octobris 1740.

LE-

LECTORI BENEVOLO.

NON eſt, candide Lector, cur te plurimum morer in limine, multiſque verbis detineam. Satis ſuperque patet ex titulo, quodnam conſilium fuerit hujus opuſculi conſcribendi. Ad mechanicam ſcilicet Philoſophiam in privatis ſcholis tradendam & comparandam parare viam in animo fuit, non autem perfectum Geometram facere. Illud ſi contigerit, mihi beatus videbor, quod res ceſſerit, ut erat in votis; neque moleſte feram, ſi quis naribus in me utatur, quaſi crambem recoxerim. Contrarium vero ſi accidet, hoc ero contentus, totum me id feciſſe, quod fieri meis pro viribus poterat, ut ad veram ſolidamque Philoſophiam facilem cuique aditum aperirem. Nemo tamen opuſculum in manus ſumat, qui in vulgari Arithmetica plane hoſpes ſit. Prima ſiquidem eximiæ hujuſce Diſciplinæ elementa hic habeo veluti nota atque perſpecta. Pauca de *calculo literali* præmitto, & forte nimis pauca: verum quantum ſatis,

ut,

ut, quæ a me hic traditur, *proportionum* theoria, cujus gratia dumtaxat specimen illud Algebrici calculi in limine exhibeo, nitide percipiatur. *Sectionum* quoque *conicarum* doctrinam summis tantum labiis attingo, quod nimirum nonnisi pauca ex iis, quæ ab hisce curvis dependent, naturæ phœnomena, in privatis scholis explicentur. Porro, cum eorum tantummodo causa opusculum hoc conscripserim, qui Mathesim ne a limine quidem salutarent, nisi turpe ducerent, se Mechanicæ Philosophiæ prorsus esse ignaros, ea dumtaxat Matheseos elementa selegi, quæ satis mihi visa sunt, ut in amæniori Physicæ parte nemo, si velit, plane hospes existat. At vero quoniam non unus est, qui Recentioribus vitio vertat, rerum naturalium scientiam ita ab illis pertractari, eoque jam esse, ipsorum studio, perductam, ut ne extremis quidem labiis delibari ea possit, nisi in addiscendis *Algebræ* atque *Geometriæ* elementis, melior vitæ pars improbo prorsus labore teratur, studium curamque omnem adhibui, ne opusculum in nimiam molem, Tyronum terriculamento,

excre-

excrescere. In condendis idcirco demonstrationibus compendio, quoad fieri poterat, studui; pluresque etiam propositiones sine ulla demonstratione, iis Theorematibus, coronidis instar, subjeci, ex quibus, si perspecta Theoremata ipsa optime fuerint, facillime deducuntur: ratus insuper, Tyronibus quammaxime profuturum, si in illis *corollariis* deducendis demonstrandisque patienter exercerentur. Ceterum velim, ut, *qni pulcberrimam banc babitant Civitatem, nullo modo Geometriam spernant. Scimus enim, quin etiam ad disciplinas omnes facilius perdiscendas interesse omnino, attigerit ne Geometriam aliquis, an non* (a). Absit tamen, ut ego cuique imponam. Tu interim, erudite Lector, benigne accipe, quæ damus; sin minus, animum velim ne digneris. Vale.

APPRO-

(a) Plato lib. VII. de *Republica*.

APPROBATIONES.

CUm jussu Reverendissimi P. Felicis a Roma V. Commissarii Generalis hujus Reformator: Familiæ attento serioque animo expenderimus Opus, cui titulus est: *Elementa Matheseos ad Philosophiam in privatis Scholis tradendam, & comparandam accommodata*, opera & studio R. P. F. Fortunati a Brixia hujus Refor. Brixiensis Provinciæ S. The. Lect., Script. Ord., & in Brix. Academ. Publ. Math. Orthodoxæ Fidei, aut pietati, probisve moribus vel minimum adversetur, idcirco dignum censemus, ut communi Scholarum utilitati publica luce fruatur, si ita videbitur &c.

Brixiæ in Conventu Corpor. Christi Anno 1740. die 14. Julii.

F. Carolus a Golleono Lector Theol.
F. Jo: Baptista a Brixia Lector Theol.

Fr.

Fr. VINCENTIUS A CASALI PUSTERLENGORUM Strict. Observ. S. P. Franc. Lector Emeritus, ac in tota Cismontana Reformator. Familia ProVice Commissarius Generalis, & humilis in Domino Servus.

Dilecto Nobis in Christo P. F. Fortunato a Brixia S. The. Lectori, ac Concionatori nostræ Refor. Provinciæ Brixien. Alumno, salutem, & Seraphicam benedictionem.

CUm juxta Apostolicas, nostrique Ordinis Constitutiones, Opus, cui titulus est: *Elementa Matheseos ad Philosophiam in privatis Scholis tradendam, & comparandam accommodata*, a Te elaboratum, ab idoneis nostræ Reformationis Censoribus, ad id specialiter a Rmo P. Felice a Roma ex V. Commiss. Gener. deputatis, recognitum fuerit, & approbatum, Nos præsentium tenore, ac cum salutaris obedientiæ merito, Tibi facultatem facimus, & impertimur, ut servatis alias de jure servandis, illud typis evulgare possis, & valeas.

Dat. Romæ ex nostro Conventu S. Franc. ad Ripas Tyberis die 23. Julii 1744.

(*Fr. Vincentius a Casali Pusterl. P. V. Commiss. Gen.*

L. ✠ S.

De mandato Paternitatis Suæ Rmæ
Fr. Antonius Maria a Vallesolida Secr. Gen.

OPE-

OPERA OMNIA

Ejusdem R. P. Fortunati a Brixia Ordinis Minor. Ref. &c. edita typis Jo: Mariæ Rizzardi Brixiæ.

ELementa Matheseos ad mechanicam Philosophiam in privatis Scholis tradendam, & comparandam accommodata. 8. fig. 1759.

Philosophia Mentis methodice tractata, atque ad usus Academicos accommodata, Logicam, & Metaphysicam universam complectens. 4. vol. 2. 1749.

Philosophia Sensuum mechanica methodice tractata, atque ad usus Academicos accommodata, Physicam generalem, & particularem complectens. 4. vol. 4. cum fig.

Dissertatio Physico-Theologica *De qualitatibus Corporum sensibilibus*, ab eodem recognita, aucta, & vindicata. 4. 1756.

Animadversiones Criticæ in Epistolam Apologeticam R. P. Udalrici Weis Benedictini Ursinensis contra P. Fortunati calumnias, aliosque &c. inscriptam. 4. 1751.

Cornelii Jansenii Yprensis Episcopi Systema *De Gratia Christi* methodice expositum, & theologice confutatum. Secundis curis. Opus posthumum. 8. Matriti & Brixiæ 1757.

Elementa Mathematica in quatuor Tomos digesta. Editio secunda accurata. 4. vol. 4. cum fig. 1755.

De Oratoriis Domesticis, Dissertatio ad Angelum Mariam Card. Quirinum. Opusculum posthumum. 8. 1757.

Osservazioni Critiche sopra certo Articolo delle Novelle Letterarie di Firenze al Num. 27. e 28. di quest' anno 1752. 8. seconda edizione 1757.

Risposta all' Autore di certo Articolo stampato ne' fogli 26 27, e 28. delle Novelle Letterarie di Firenze dell' anno 1753. 4. Madrid 1754.

PRO.

PROLEGOMENA.

I.

MAthesis nomine ea designatur facultas, quæ circa *quantitatem* in abstracto sumtam versatur, ejusque affectiones inquirit, atque demonstrat. *Mathesis* græce dicta est, nimirum *disciplina*, *doctrina*, sive *scientia* latine. Tanta quippe est, quæ ex illa in omnes plane scientias derivatur, utilitas, tantaque eorum, quæ in ipsa traduntur, certitudo & evidentia, ut *scientiæ* atque *disciplinæ* nomen peculiari quodam jure illi competere videatur. Duæ porro sunt *Matheseos* partes præcipuæ, *Arithmetica* scilicet, & *Geometria*, quemadmodum duo sunt genera *quantitatis*, nimirum *discreta*, & *continua*.

I I.

Arithmetica est scientia theoretico practica de *quantitate discreta*, sive de *numeris*. *Geometria* vero est scientia theoretico practica de *quantitate continua permanenti finita*, ut tali, nimirum de *lineis*, *superficiebus*, & *solidis*, prout terminata sunt, & a sensibili materia præscindunt. Ut autem *Arihmetica* Phœnicibus, quod propter mercaturam, cui quammaxime dediti erant, *numerorum* scientiam impensius colerent, ita *Geometria* Ægyptiis accepta refertur; quatenus nempe, cum propter anniversariam Nili exundationem, agrorum fines confunderentur, necesse illis fuit, ut scientiam invenirent, qua iterum agri dividerentur, quodque suum erat, cuique redderetur. *Geometria* idcirco dicta est, quod *terræ dimensionem* sonat. Si tamen res sit de prima utriusque hujusce eximiæ facultatis origine, inficias ibit nemo, eam Adamo referri debere acceptam, atque utriusque notitiam, sicuti etiam reliquas omnes scientias, ab eo in posteros derivasse; cum neminem lateat, primos parentes plenitudinem scientiæ, statim ac creati fuerant, a Summo rerum Opifice accepisse.

III.

Principia, quæ in Mathesi adhibentur, sunt *definitiones*, *axiomata*, & *postulata*. *Definitionibus* explicantur termini, quorum notio latet. *Axiomata* sunt propositiones quædam theoreticæ, quarum veritas ex ipsis terminis manifesta est; unde *communes* etiam *notiones* vocantur. *Postulata* vero sunt quædam ita factu facilia, ut frustraneum sit, ea fieri posse demonstrare. Hinc *axiomata* ad *theoreticam*, *postulata* ad *practicam* Matheseos partem spectant.

IV.

Propositiones demostrandæ vel *theoremata* sunt, vel *problemata*. *Theorema* dicitur propositio speculativa, quæ ex definitionibus, axiomatibus, aliisve jam antea demonstratis propositionibus ostenditur. *Problema* vero est propositio, qua aliquid faciendum proponitur, illudque recte fieri, sicuti in ea traditur, demonstratur. *Theoremata* idcirco traduntur in parte Matheseos *theoretica*. *Problemata* vero in parte ejusdem *practica* exhibentur. Datur porro & aliud theoreticarum propositionum genus, quod *Lemma* dicitur. Est autem *Lemma* propositio quædam speculativa, quæ cum *theoremati* demonstrando inserviat, neque commode citari possit, illi præmittitur, & demonstratur.

V.

Mathematica demum methodus in eo tota posita est, I. *ut a generalioribus & simplicibus sumto initio, ad minus generalia, atque composita paulatim ac veluti per gradus progrediatur*. II. *ut nihil relinquatur in terminis, quod obscurum sit vel ambiguum*. III. *ut omnes propositiones, quæ ex terminis non sunt evidenter notæ, ope definitionum præmissarum, axiomatum concessorum, vel propositionum antea demonstratarum ostendantur*.

ISAGOGES MATHEMATICÆ.

ALgebra, ſive *Arithmetica ſpecioſa*, ea facultas eſt, quæ *indeterminatarum* quantitatum calculum tradit. Loco idcirco notarum numeralium 1. 2. 3. &c. quæ in *vulgari* Arithmetica adhibentur, alphabeti literæ *a*, *b*, *c*, *d*, &c. in *ſpecioſa* uſurpantur; ut enim illæ quantitatem *determinatam*, ita iſtæ *indeterminatam* optime deſignant & exprimunt. Tria porro ſunt ſigna, quæ potiſſimum in *Algebra* uſu veniunt, ſcilicet $+$, $-$, & $=$. Signum $+$ ſignificat *plus*, ſignum $-$ *minus*, & ſignum $=$ *æqualitatem*. Videlicet $a+b$ deſignat, quantitatem a ſumendam ſimul eſſe cum quantitate b. Contra vero $a-b$ exceſſum exprimit, quo magnitudo a ſuperat magnitudinem b. At vero $a=b$ ſignificat, magnitudines a, b eſſe æquales. Cum ergo ſcribitur $a+b-m$, perinde eſt, ac ſi dicatur, quantitatem a una cum quantitate b æquare quantitatem m; ſicuti etiam cum ſcribitur $a-b=m$, perinde eſt, ac ſi dicatur, exceſſum magnitudinis a ſupra magnitudinem b magnitudini m eſſe æqualem. Magnitudo demum Algebrica dividitur in *ſimplicem*, & *complexam*. Magnitudo *ſimplex* ſive *incomplexa* eſt illa, quæ una, vel pluribus literis nullo interjecto ſigno $+$, aut $-$ ſimul copulatis exprimitur, cujuſmodi ſunt a, b, bdx &c. *Complexa* vero magnitudo ea eſt, quæ pluribus terminis conſtat, interjecto ſigno $+$, vel $-$ ſimul unitis, ut $a+b$, & $a-b+d$ &c. Porro ſicuti in Arithmetica *vulgari*, ita in *ſpecioſa*, quatuor numerantur operationes, videlicet *additio*, *ſubtractio*, *multiplicatio*, & *diviſio*.

De additione.

I.

2. *Additio* in *Algebra* fit ope figni pofitivi $+$, eas omnes fcilicet magnitudines illo mediante fimul copulando, quarum fumma quæritur. Ut fi magnitudini a addenda fit magnitudo b, fcribendum eft $a+b$, adeo ut $a+b$ fit illarum fumma quæfita. Hoc eodem modo *complexarum* quoque magnitudinum additio perficitur. Nimirum ficuti $a+b$ exprimit fummam magnitudinum *fimplicium* a, b, ita $a+b+d-e$ fummam defignat magnitudinem *complexarum* $a+b$, $d-e$.

II.

3. Verum fi in aliqua fumma fuerint plures termini fimiles, hoc eft, eadem litera expreffi, eodemque figno $+$, vel $-$ affecti, unus tantum, ceteris deletis, in calculo fcribi debet, præfixa illi nota numerica, quæ numerum ipforum terminorum defignet. Videlicet loco fummæ $a+b+a$, fcribendum eft $2a+b$. Hujufmodi porro numerus Algebrico termino præfixus, indicans quoties terminus ipfe in calculo computari debeat, illius *coefficiens* nuncupatur. Sic numerus 2 dicitur *coefficiens* termini $2a$.

III.

4. Si termini *fimiles*, qui fimul colligendi funt, contrariis fignis affecti fuerint, in ipfa fumma deleantur. Sic in fumma $a+b+d-b$ deleantur termini $+b$, $-b$; quippe ratione fignorum oppofitorum illi fefe mutuo perimunt.

IV.

5. Quod fi termini fimiles contrariis fignis affecti, habeant *coefficientes* inæquales, minor *coefficiens* majori fubducatur, ejufque refiduo illud in fumma præfigatur fignum,

quo

quo affectus erat terminus majori *coefficiente* donatus. Ut, si in aliqua summa habeantur termini $+6a$, $-4a$, vel $-4b$, $+2b$, loco aggregati $+6a-4a$, scribatur $+2a$; & loco aggregati $-4b+2b$, scribatur $-2b$. Est enim $+6a-4a=+2a$, & $-4b+2b=-2b$.

De subtractione.

I.

6. Quemadmodum *additio* fit ope signi positivi $+$, ita contraria ratione, ope signi negativi $-$ *subtractio* perficitur. Nimirum una magnitudo alteri subtrahitur, cum ita mediante signo $-$ illæ simul junguntur, ut magnitudo, quæ subtrahi debet, consequatur; illa vero, cui debet subtractio fieri, signum $-$ præcedat. Ut si magnitudo b subtrahenda sit magnitudini a, scribendum est $a-b$.

II.

7. In subtractione magnitudinum *complexarum* signa *positiva* magnitudinis subtrahendæ mutari debent in *negativa*, & vicissim *negativa* in *positiva*. Nimirum in subtractione magnitudinis $b+d$ a magnitudine a, scribendum est $a-b-d$. In subtractione vero magnitudinis $b-d$ a magnitudine x scribendum est $x-b+d$; cujus ratio est, quia in primo casu tota summa $b+d$ debet subtrahi; in altero vero non debet subtrahi, nisi excessus, quo magnitudo b magnitudinem d excedit. Pro subtractione magnitudinum *coefficientibus* affectarum, animadvertenda sunt, quæ diximus §. 5., ubi notandum, & pro *coefficiente* magnitudinis nulla nota numerica ad sinistram affectæ unitatem semper intelligi, videlicet a perinde esse ac $1a$; sicuti & dm perinde ac $1dm$.

De multiplicatione.

I.

8. Una magnitudo *incomplexa* per aliam in *Algebra* multiplicatur, cum nullo interjecto signo simul junguntur. Sic *a* multiplicatur per *b*, cum scribitur *ab*. Unde *ab* exprimit productum, quod oritur ex ductu magnitudinis *a* in magnitudinem *b*, sicuti etiam *mxy* productum designat, quod ex trium magnitudinum *m*, *x*, *y* multiplicatione efficitur.

I I.

9. Perinde porro est, quocunque ordine literæ in producto Algebrico sibi mutuo apponantur. Videlicet productum *abd* non differt producto *bda*, neque a producto *dab*. Cum enim idem semper emergat productum, sive 3 per 4, sive 4 per 3 multiplicetur, idem quoque erit productum, sive *a* per *b*, & *ab* per *d* multiplicetur, sive *b* in *a*, & *ba* in *d* ducatur.

I I I.

10. Si eadem litera pluries, quam *bis*, in eodem producto occurrat, semel tantum in illo scribenda est. Verum paulo altius post ipsam, nota numerica illi appingi debet, quæ exprimat, quoties eadem litera in tali producto contineatur. Nimirum loco producti *aaa*, scribendum est a^3. Hujusmodi autem numerus *exponens* dicitur, quatenus nempe exprimit factum ex ipsa litera tot vicibus, una minus, in seipsam ducta, quot unitates in illo numerantur. Sic numerus 3 in magnitudine a^3 designat productum, quod duplici multiplicatione perficitur, videlicet ex *a*, per *a*, & ex producto *aa* iterum per *a*.

I V.

IV.

11. Hinc numeri *exponentes* in multiplicatione terminorum similium debent simul colligi, & summa eidem literæ appingi. Ut si multiplicari debeat a^3 per a^2, facta summa 5 exponentium 3, 2, scribendum est a^5. Cum enim a^3 non differat ab *aaa*, & a^2 ab *aa* (§. 10.) & productum ex *aaa* in *aa* sit *aaaaa* (§. 8.), productum quoque ex a^3 in a^2 erit a^5. Si vero termini sint dissimiles, jungi debent in multiplicatione absque ulla operatione circa eorum *exponentes*. Sic productum ex a^3 in b^2 erit $a^3 b^2$.

V.

12. Si magnitudo *complexa* per *incomplexam* multiplicanda est, magnitudo *incomplexa* in singulos terminos complexæ magnitudinis duci debet, & producta partialia iisdem signis simul debent uniri, quibus simul copulati sunt termini magnitudinis multiplicatæ. Sic productum ex magnitudine $a+b-d$ ducta in magnitudinem x, erit $ax+bx-dx$. Non enim tota una magnitudo per aliam multiplicatur, nisi singulæ illius partes in ipsam ducantur.

VI.

13. Quod si tam magnitudo multiplicans, quam magnitudo multiplicanda, *complexæ* fuerint, singuli termini unius in singulos terminos alterius duci debent. Verum ratione signorum, quibus afficiuntur, hæc sunt observanda.

I. $+$ per $+$ reddit $+$

Ut si multiplicandum sit $+a$ per $+b$, productum erit $+ab$.

II. $+$ per $-$ reddit $-$.

Nimirum productum ex $+a$ per $-b$ erit $-ab$.

III. $-$ per $+$ reddit $-$.

Videlicet productum ex $-a$ per $+b$ erit $-ab$.

IV. $-$ per $-$ reddit $+$.

Factum scilicet ex $-a$ in $-b$ erit $+ab$.

Itaque productum, quod fit ex multiplicatione magnitudinis $a+b-d$ per magnitudinem $m-n+p$, constabit ex tribus productis partialibus, nimirum primo ex producto $ma+mb-md$, quod nascitur ex multiplicatione totius $a+b-d$ per terminum m, sive $+m$ (terminus enim nullo signo affectus pro positivo habetur). Secundo ex producto $-na-nb+nd$, quod fit ex toto $a+b-d$ ducto in $-n$. Tertio ex producto $+ap+bp-dp$, quod ex multiplicatione totius $a+b-d$ per $+p$ efficitur. Quamobrem productum totale erit $ma+mb-md-na-nb+nd+ap+bp-dp$. Horum omnium rationem dedimus in *Algebræ Synopsi* §. 52. *& seq.*

VII.

14. Ceterum multiplicatio fit etiam simul copulando magnitudines, quæ inter se mutuo multiplicari debent, ope signi $\times$. Sic $a\times b$ designat factum ex magnitudine a ducta in magnitudinem b, seu magnitudinem a ducendam esse in magnitudinem b, sicuti etiam $\overline{a+b}\times\overline{d-e}$ indicat, complexam magnitudinem $a+b$ per magnitudinem $d-e$ multiplicari debere; atque adeo factum exprimit, quod ex harum magnitudinum multiplicatione emergit.

De divisione.

I.

15. *Divisio* unius magnitudinis, per aliam exprimitur, magnitudini dividendæ dividentem, ducta lineola, instar fractionis, subscribendo. Sic fractio $\frac{a}{b}$ divisionem designat magnitudinis a per magnitudinem b, atque ipsius divisionis *quotum* exprimit, quemadmodum fractio numerica $\frac{8}{2}$ in vulgari Arithmetica indicat divisionem numeri 8 per numerum 2, nec non ejusdem divisionis *quotum*.

II.

II.

16. Plerumque tamen loco Algebricæ fractionis *quotum* unius magnitudinis per alteram divisæ indicantis, integra aliqua magnitudo in calculo assumitur, & tunc dicitur una magnitudo alteri in calculo substitui. Ut, si loco fractionis $\frac{a}{b}$, qua divisio exprimitur magnitudinis a per magnitudinem b, assumatur quantitas m, hæc dicitur substitui fractioni $\frac{a}{b}$, eique ponitur æqualis; unde scribitur $\frac{a}{b} = m$, & ipsa quantitas m spectatur, veluti *quotus* magnitudinis a per magnitudinem b divisæ.

III.

17. Quoniam vero in omni divisione, *quoto* per *divisorem* multiplicato, fit terminus divisus, propterea si magnitudo Algebrica dividenda omnes *divisoris* literas contineat, illis omnibus in ea deletis, quod superest, erit *quotus* divisionis. Sic *quotus* magnitudinis $abde$ divisæ per magnitudinem bd erit ae, nimirum erit $\frac{abde}{bd} = ae$; quippe, si divisor bd per ae multiplicetur, emergit ipsa divisa magnitudo $abde$ (§. 8.). Eadem ratione erit $\frac{am+bm}{a+b} = m$, cum itidem sit $a+b \times m = am+bm$ (§. 12.).

De

De variis magnitudinum Algebricarum gradibus.

I.

18. Magnitudo Algebrica *unius dimensionis* dicitur illa, quæ ex aliis in se invicem ductis non consurgit. Hujusmodi sunt magnitudine a, $b+d$, $e-m+x$ &c. Magnitudo *duarum dimensionum* ea vocatur, quæ ex una simplici magnitudine in alteram ducta efficitur, ut ab. Illa vero *trium dimensionum* vocari solet, quæ fit ex ductu trium magnitudinum simplicium inter se mutuo, ut abd. Hinc magnitudo *unius dimensionis* respondet *lineæ*; magnitudo *duarum dimensionum* respondet *superficiei*, & magnitudo *trium dimensionum* respondet *corpori*.

II.

19. Si una magnitudo semel in seipsam ducatur, fit productum, quod dicitur *quadratum*, & *potestas secunda*, ut aa, bb &c. Magnitudo vero, ex qua *potestas* ipsa efficitur, *radix quadrata* nuncupatur. Sic magnitudo a est *radix quadrata* magnitudinis aa. Oritur quippe aa ex quantitate a semel ducta in seipsam.

III.

20. *Potestas tertia*, quæ etiam *cubus* dicitur, est magnitudo consurgens ex multiplicatione magnitudinis *quadratæ* per suam *radicem*. Hujusmodi est quantitas aaa, utpote quæ oritur ex ductu quadrati aa in suam radicem a. Ipsa autem radix a, si cum producto aaa comparetur, dicitur *radix cubica*.

AXIO-

AXIOMATA GENERALIA MATHESEOS.

21. *Totum* dicitur illa magnitudo, quæ ex pluribus aliis simul sumtis consurgit. *Pars* vero magnitudo illa vocatur, quæ simul cum aliis sumta, totum constituit. Hæc duplex est, *aliquota*, & *aliquanta*. Prior est illa, quæ aliquoties sumta suum adæquat totum. Posterior vero, quæ aliquoties sumi nequit, quin vel suum totum excedat, vel ab illo deficiat. Sic numeri 9 pars *aliquota* est numerus 3, *aliquanta* vero numerus 4. Nam 3 *ter* sumtus adæquat numerum 9. At numerus 4 *bis* sumtus ab illo deficit; si vero *ter* sumatur, ipsum excedit.

AXIOMA I.

22. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis;* & vicissim *omnes partes simul sumtæ adæquant totum.*

AXIOMA II.

23. *Omne totum est majus una sui parte seorsim ab aliis sumta;* & vicissim *qualibet pars est minor toto.*

AXIOMA III.

24. *Magnitudines, quæ eidem, vel æqualibus sunt æquales, inter se quoque sunt æquales. Quæ vero æquales sunt inæqualibus, sunt inter se inæquales.*

AXIOMA IV.

25. *Magnitudo, quæ uni æqualium æqualis est, alteri quoque est æqualis; & si una duarum æqualium fuerit uni æqualis, etiam altera eidem æqualis erit.*

AXIO-

AXIOMA V.

26. *Si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.*

AXIOMA VI.

27. *Si æqualibus æquales partes subducantur, residua sunt æqualia.*

AXIOMA VII.

28. *Si inæqualibus æqualia addantur, tota, quæ fiunt, sunt inæqualia.*

AXIOMA VIII.

29. *Si inæqualibus æqualia subducantur, quæ remanent, sunt inæqualia.*



ELE-

ELEMENTA MATHESEOS.

IN hiſce tradendis elementis a *proportionum* ſcientia initium ſumimus. Hæc enim quanti in univerſa Matheſi momenti ſit, nemo eſt vel leviſſime in ea verſatus, qui ignoret. Omnes certe Matheſeos partes adeo ab illa dependent, ut in ipſis nihil prorſus tradatur pulchri atque utilis, quod a *proportionum* doctrina non derivetur. Viribus itaque omnibus enitendum eſt, ut accuratius, quo fieri poteſt, ea percipiantur, quæ hac in parte traduntur.

SECTIO PRIMA.

De proportione, & proportionalitate magnitudinum in genere.

DEFINITIO I.

30. P*Roportio, ſive ratio duarum magnitudinum eſt habitudo unius ad aliam, quatenus nempe earum una certo quodam modo alteram continet, vel in illa continetur*. Sic numerus 8, quatenus *bis* continet numerum 4, & *ter* in numero 24 continetur, dicitur aliquam ad utrumque *rationem*, ſive *proportionem* habere. Neceſſe idcirco eſt, ut magnitudines, quæ inter ſe mutuo comparantur, ſint ejuſdem generis, nempe tales, ut una aliquoties ſumpta, alteram excedere poſſit.

COROLLARIUM.

31. Hinc *proportio duarum magnitudinum diviſionis ope di-*

gno-

gnoscitur. Per divisionem enim palam fit, quoties una alteram contineat. Nam magnitudo divisa eo modo continet magnitudinem dividentem, vel in illa continetur, quo divisionis *quotus* continet unitatem, vel in unitate comprehenditur.

DEFINITIO II.

32. *Antecedens proportionis est illa magnitudo, quæ ad aliam refertur. Consequens vero illa, ad quam refertur*. Ut si determinanda sit *proportio* magnitudinis a ad magnitudinem b, magnitudo a erit *antecedens* proportionis; *consequens* vero magnitudo b.

Hypothesis.

33. Proportio duarum magnitudinum exprimitur per fractionem, cujus *numerator* sit *antecedens* proportionis; *denominator* vero illius *consequens*. Sic fractio $\frac{a}{b}$ rationem exprimit magnitudinis a ad magnitudinem b.

DEFINITIO III.

34. *Exponens*, sive *denominator proportionis est quantitas integra, vel fracta modum exprimens, unitati comparata, quo antecedens proportionis consequentem continet, vel in illo continetur*. Sic numerus 2 est *exponens* rationis, quam habet 6 ad 3; quippe designat, numerum 6 *bis* numerum 3 comprehendere. Similiter fractio $\frac{1}{3}$ est *exponens* rationis numeri 2 ad numerum 6; nam palam efficit, *antecedentem* 2 esse unam tertiam partem *consequentis* 6, sive *ter* in *consequente* 6 comprehendi.

COROL-

COROLLARIUM.

35. *Exponens propterea rationis cujuscunque non differt a quoto termini antecedentis per consequentem divisi*; atque adeo cum terminus *divisus* eo modo respiciat *divisorem*, quo divisionis *quotus* respicit *unitatem*, ut patet ex Arithmeticis, *antecedens proportionis erit ad consequentem, ut est illius exponens ad unitatem*.

DEFINITIO IV.

36. *Proportio* vel *æqualitatis* est, vel *inæqualitatis*. *Prior est habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram adæquat*. *Posterior vero est habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram superat*. Hæc dividitur in *rationalem*, & *irrationalem*. *Rationalis est illa, quæ numeris exprimi potest*. *Irrationalis vero ea est, quæ numeris designari nequit*. *Rationalis* dividitur in *proportionem majoris inæqualitatis*, & *minoris inæqualitatis*. *Proportio majoris inæqualitatis est habitudo majoris magnitudinis ad minorem*. *Proportio vero minoris inæqualitatis est proportio magnitudinis minoris ad majorem*. Sic ratio numeri 6. ad numerum 3 est *majoris inæqualitatis*; *minoris* vero ratio numeri 3 ad numerum 6.

DEFINITIO V.

37. Proportionis *majoris inæqualitatis* quinque numerantur species, scilicet *multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplex superparticularis*, & *multiplex superpartiens*. *Ratio multiplex est, cum major magnitudo aliquoties minorem adæquate continet*, ut ratio 6 ad 3, quæ dicitur *dupla*, ratio 6 ad 2, quæ dicitur *tripla* &c. *Ratio superparticularis est, quando major magnitudo semel minorem continet, & unam illius partem aliquotam*, ut ratio numeri 3 ad numerum 2. *Ratio superpartiens est, quando major semel continet minorem, & aliquot partes illius aliquotas, quæ tamen simul sumtæ*

& aliunam partem illius aliquotam non constituunt, ut ratio numeri 5 ad numerum 3. *Ratio multiplex superparticularis quando major aliquoties continet minorem, & unam insuper est*, *partem illius aliquotam*, ut ratio numeri 10 ad 3. *Ratio demum multiplex superpartiens est, cum major magnitudo aliquoties continet minorem, & plures illius partes aliquotas, unam aliquotam, si simul sumantur, minime conficientes*, ut ratio numeri 11 ad numerum 3. Tot quoque sunt species *proportionis minoris inæqualitatis*, eodemque modo denominantur, addita dumtaxat particula *sub* Videlicet, sicuti ratio numeri 6 ad numerum 3 dicitur *dupla*, ita vicissim ratio numeri 3 ad numerum 6 *subdupla* nuncupatur, atque ita de ceteris.

DEFINITIO VI.

38. *Duæ rationes dicuntur* similes, *sive* æquales, *cum antecedentes earum termini eodem modo continent suos consequentes, vel in illis continentur*. Sic *ratio* numeri 12 ad numerum 4 *similis*, seu *æqualis* est rationi numeri 6 ad numerum 2. Ut enim *antecedens* 12 *ter* continet suum *consequentem* 4, ita *antecedens* 6 suum *consequentem* 2 *ter* comprehendit.

COROLLARIUM.

39. *Illæ ergo rationes erunt æquales inter se, quæ habent exponentes æquales. Et si duæ rationes æquales inter se fuerint, earum quoque exponentes erunt æquales*.

DEFINITIO VII.

40. *Duarum rationum illa dicitur* major, *cujus antecedens magis suum consequentem continet, vel minus in suo consequente continetur, quam alterius antecedens suum consequentem contineat, vel in illo comprehendatur*. Sic ratio numeri 8 ad 2 *major* est ratione numeri 6 ad 3; quia numerus 8 pluries continet 2, quam numerus 6 contineat 3. Vicissim ratio numeri 2 ad 8

est

est *minor* ratione numeri 3 ad 6. Nam numerus 2 pluries continetur in numero 8, quam numerus 3 contineatur in numero 6.

COROLLARIUM.

41. *Ea idcirco ratio major est, quæ majorem exponentem habet. Et si una ratio major altera fuerit, illius quoque exponens major erit.*

DEFINITIO VIII.

42. *Partes similes dicuntur illæ, quæ eandem ad suum totum rationem habent.* Sic numeri 2, 3 sunt *partes similes* numerorum 6, 9; cum ratio numeri 2 ad numerum 6 sit *æqualis* rationi, quam habet numerus 3 ad numerum 9 (§. 38).

DEFINITIO IX.

43. *Proportionalitas Geometrica*, quam Græci *analogiam* appellant, *est rationum similitudo*, sive *æqualitas*. Quatuor idcirco magnitudines dicuntur *geometrice proportionales*, *cum ratio primæ ad secundam diversa ab ea non est, quam habet tertia ad quartam*. Hujusmodi sunt numeri 12, 6, 8, 4; cum scilicet *dupla* sit tam ratio primi ad secundum, quam ratio tertii ad quartum. Salva tamen esse potest *proportionalitas geometrica* etiam in tribus tantum terminis; cum possit esse primus ad secundum, ut est ipse secundus ad tertium, sicuti manifeste patet in tribus numeris 12, 6, 3.

COROLLARIUM I.

44. *Si ergo exponens rationis, quam habet prima quatuor magnitudinum ad secundam, fuerit æqualis exponenti rationis, quam habet illarum tertia ad quartam, illæ quatuor magnitudines erunt geometrice proportionales.* Et vicissim, *si quatuor magnitudines proportionales fuerint, exponens rationis primæ ad secundam æquabit exponentem rationis tertiæ ad quartam* (§. 39).

V.

65. *Convertendo ex compositione rationis*, cum antecedens & consequens instar unius ad antecedentem referuntur; ut cum, si fuerit A . a = B . b, evincitur esse A + a . A = B + b . B.

VI.

66. *Convertendo ex divisione rationis*, cum excessus antecedentis supra consequentem ad antecedentem refertur, nimirum cum evincitur esse A — a . A = B — b . B, si fuerit A . a = B . b.

VII.

67. Demum ex *æqualitate rationis ordinatæ*, cum posita duplici serie magnitudinum A. B. C, a, b, c, quarum prima A sit ad secundam B in una serie, ut prima a ad secundam b in altera serie, utque secunda b ad tertiam c, ita sit secunda B ad tertiam C, atque ita de ceteris, demonstratur esse primam A ad ultimam C, ut prima a ad ultimam c. Ex *æqualitate* vero *rationis perturbatæ*, cum itidem, posita duplici serie magnitudinum A. B. C, a. b. c ita se habentium, ut prima A sit ad secundam B, sicuti antepenultima b ad ultimam c; & ut a ad b, ita sit B ad C, demonstratur adhuc esse primam A ad ultimam C, quemadmodum est prima a ad ultimam c.

AXIOMATA
ad doctrinam proportionum spectantia.

Quæ hoc loco exhibemus, demonstrata habentur lib. I. *Elementorum*. Ea autem hic assumimus veluti *per se nota*, quod vere, vel levissima attentione adhibita, cuique pateant.

ponens rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, & rationis $\frac{d}{e}$ fuerit n, ratio, cujus *exponens* ſit mn, erit compoſita ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{e}$.

DEFINITIO XIV.

54. *Ratio duplicata dicitur illa, quæ ex duabus; triplicata, quæ ex tribus rationibus æqualibus componitur.* Ut ſi ratio $\frac{m}{n}$ fuerit compoſita ex duabus æqualibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ratio $\frac{m}{n}$ erit *duplicata* rationis $\frac{a}{b}$. Similiter, ſi æquales inter ſe fuerint tres rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, atque ex his compoſita ſit ratio $\frac{x}{y}$ hæc dicetur *triplicata* rationis $\frac{a}{b}$.

COROLLARIUM.

55. Itaque poſita quantitate z pro *exponente* rationis $\frac{a}{b}$, magnitudo m erit ad n in ratione *duplicata* magnitudinis a ad b, ſi *exponens* rationis $\frac{m}{n}$ fuerit zz, productum ſcilicet, quod emergit ex *exponente* z ſemel ducto in ſeipſum. Similiter magnitudo x erit ad magnitudinem y in ratione *triplicata* ejuſdem a ad b, ſi *exponens* rationis $\frac{x}{y}$ fuerit productum ex *exponente* z rationis $\frac{a}{b}$ multiplicato per *exponentem* zz ejuſdem rationis $\frac{a}{b}$ *duplicatæ*, nempe ſi fuerit quantitas zzz.

Co-

COROLARIUM II.

56. Hinc *exponens rationis* duplicatæ *est quadratum*; *exponens vero rationis* triplicatæ *est cubus exponentis datæ rationis*.

DEFINITIO XV.

57. *Duæ magnitudines dicuntur esse in ratione* subduplicata *aliarum duarum, cum ea est ipsarum ratio, ut, si semel in seipsam ducatur, ratio duarum illarum datarum magnitudinum consurgat. Dicuntur vero esse in ratione* subtriplicata, *cum earum ratio hujusmodi est, ut ducta in seipsam* duplicatam *datarum rationem efficiat*. Videlicet magnitudo a erit ad magnitudinem b in ratione *subduplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n, si ex ratione $\frac{a}{b}$ semel ducta in seipsam fiat ratio $\frac{m}{n}$. Erit vero a ad b in ratione *subtriplicata* duarum x, y, si ex ratione $\frac{a}{b}$ ducta in seipsam *duplicatam* ratio $\frac{x}{y}$ consurgat.

COROLLARIUM I.

58. Itaque magnitudo a erit ad b in ratione *subduplicata* magnitudinum m, n, si semel multiplicato per seipsum *exponente* rationis $\frac{a}{b}$, fiat *exponens* rationis $\frac{m}{n}$. Erit vero a ad b in ratione *subtriplicata* duarum x, y, si ducto *exponente* rationis $\frac{a}{b}$ in *exponentem* ipsius rationis $\frac{a}{b}$ *duplicatæ*; consurgat *exponens* rationis $\frac{x}{y}$.

COROLLARIUM II.

59. Ex quo apparet, *exponentem rationis subduplicatæ esse*

COROLLARIUM II.

45. *Si prima quatuor magnitudinum geometrice proportionalium fuerit æqualis, vel major, aut minor secunda, etiam tertia erit æqualis, vel major, aut minor quarta.*

Hypothesis II.

46. Proportionalitas geometrica quatuor magnitudinum *a*, *b*, *c*, *d* hoc modo exprimitur *a*. *b*=*c*.*d*. Plerique tamen loco signi æqualitatis =, adhibent signum ::, scribuntque *a*.*b*::*c*.*d*.

DEFINITIO X.

47. Quatuor magnitudines dicuntur inter se *directe* proportionales, *si fuerit prima ad secundam, ut tertia ad quartam. Si vero fuerit quarta ad tertiam, ut prima ad secundam*, proportionales *reciproce* nuncupantur.

DEFINITIO XI.

48. *Si prima quatuor magnitudinum fuerit ad secundam, ut ipsa secunda ad tertiam, & secunda ad tertiam, ut tertia ad quartam*, illæ quatuor magnitudines dicuntur *continuo* proportionales. At vero *discrete* tantum proportionales, si nonnisi prima fuerit ad secundam, ut tertia ad quartam. Sic *continuo* proportionales sunt quatuor numeri 24. 12. 6. 3. *Discrete* vero quatuor 12. 6. 8. 4. Secunda & tertia quatuor magnitudinum *continuo* proportionalium dicuntur *duæ mediæ continuo proporotionales*. *Media* vero *continuo proportionalis* dicitur secunda trium *continuo* proportionalium. Ubicumque tamen terminorum proportionalium mentio fit, *discreta* semper *proportionalitas* intelligitur, nisi ly *continuo* expresse ponatur.

Hypo-

Hypothesis.

49. Proportionalitas *continua* indicatur signo ∺ ipsis magnitudinibus præfixo. Videlicet ad indicandam *continuam proportionalitatem* quatuor magnitudinum *a*, *b*, *c*, *d*, scribitur ∺ *a*.*b*.*c*.*d*.

SCHOLION.

50. Datur etiam alia *proportionalitatis* species, quæ *Arithmetica* dicitur. Ea non aliud est, nisi *differentiarum æqualitas*. Videlicet quatuor magnitudines dicuntur *Arithmetice proportionales*, si excessus primæ supra secundam fuerit æqualis excessui tertiæ supra quartam, ut patet de quatuor numeris 16. 10. 82. Quod si omnium excessus, nimirum primæ supra secundam, secundæ supra tertiam, & tertiæ supra quartam, æquales inter se fuerint, qua ratione se habent numeri 12. 10. 8. 6., *continuo arithmetice proportionales* nuncupantur. *Discrete* vero, si secus se habuerint, ut de *geometrica proportionalitate* diximus.

DEFINITIO XII.

51. *Magnitudines homologæ*, sive *ratione similes*, *dicuntur illæ*, *quæ eandem ad suos consequentes terminos rationem habent.* Ut si fuerit A.*a*==B.*b*, termini A, B dicentur *homologi*.

COROLLARIUM.

52. *In omni ergo proportionalitate geometrica termini antecedentes sunt homologi.*

DEFINITIO XIII.

53. *Ratio ex aliis composita vocatur illa, cujus exponens est factum ex aliarum exponentibus inter se multiplicatis:* ut si ex-

Lemma II. fundamentale.

Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales; productum extremarum æquabit productum mediarum.

73. Esto $a.b = c.d$. Dico, esse $ad = bc$.

Demonstratio.

Cum enim sit $a.b = c.d$, si ponatur $\frac{d}{b} = m$, erit etiam $\frac{c}{d} = m$ (§. 39.). Est autem $bm = a$, & $dm = c$ (§. 72.). Ergo erit quoque $bm \times d = a \times d$, & $dm \times b = c \times b$, sive $bmd = ad$, $dmb = cb$ (§. 68); ac proinde $ad = cb$ (§. 24); cum sit $bmd = dmb$ (§. 9.).

COROLLARIUM.

74. *Si fuerint tres magnitudines continuo geometrice proportionales, productum extremarum erit æquale quadrato mediæ.* Erit nempe $bb = ad$, si fuerit $\div a.b.d$. Est enim $\div a.b.d$ idem ac $a.b = b.d$.

Lemma III. fundamentale.

Si productum duarum extremarum fuerit æquale producto duarum mediarum, quatuor ipsæ magnitudines erunt geometrice proportionales.

75. Productum ad extremarum a, d quatuor magnitudinum a, b, c, d sit æquale producto bc mediarum b, c. Dico, esse $a.b = c.d$.

Demonstratio.

Ponatur $\frac{a}{d} = m$, $\frac{c}{b} = n$; adeoque sit $bm = a$, $dn = c$ (§. 72.). Erit igitur $bmd \times d = a \times d$, sive $bmd = ad$, & $dn \times b$ $= c$

$= c \times b$, sive $dnb = bc$ (§.68.). Est autem $ad = bc$ ex hypothesi. Ergo erit etiam $bmd = dnb$ (§. 24.). Constat autem esse $\frac{bmd}{bd} = \frac{dnb}{bd}$ (§. 69.); & $\frac{bmd}{bd} = m$, $\frac{dnb}{bd} = n$ (§.17.). Ergo erit $m = n$. Quotus autem m est *exponens* rationis $\frac{a}{b}$, & quotus n est *exponens* rationis $\frac{c}{a}$ (§. 35.). Ergo erit $a.b = c.d$ (§. 39.).

COROLLARIUM.

76. *Si, positis tribus magnitudinibus, productum extremarum fuerit aquale quadrato mediæ, tres ipsæ magnitudines erunt continuo geometrice proportionales*. Videlicet, si fuerit $ad = bb$, erit $\div a.b.d$. Non enim potest esse $ad = bb$, quin sit $a.b. = b.d$.

THEOREMA I.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem multiplicentur, producta erunt directe, ut ipsæ magnitudines multiplicatæ.

77. Duæ inæquales magnitudines a, b multiplicentur per eandem d. Dico, esse $ad.bd = a.b$.

Demonstratio.

Cum enim sit $adb = bda$ (§. 9.) erit $ad.bd = a.b$ (§. 75.).

COROLLARIUM.

78. *Si quatuor magnitudines proportionales per eandem multiplicentur, producta erunt inter se proportionalia*. Ut, si fuerit $a.b = c.d$, erit etiam $am.bm = cm.dm$. Cum enim sit $am.bm = a.b$, $cm.dm = c.d$ (§. 77.), & ex hypothesi $a.b = c.d$, erit quoque $am.bm = cm.dm$ (24.).

COROL.

COROLLARIUM II.

79. *Si prima, secunda quatuor magnitudinum proportionalium per eandem quantitatem multiplicentur, producta erunt inter se, ut tertia ad quartam.* Nimirum, si fuerit $a.\ b = c.\ d$, erit etiam $am.\ bm = c\ d$. Quippe, cum sit $am.\ bm = a.\ b$ (§. 77.) & $a.b = c.d$, erit itidem $am.\ bm = c.d$ (§. 25.).

COROLLARIUM III.

80. *Si prima & secunda quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem multiplicentur, per aliam vero tertia & quarta, producta erunt proportionalia.* Posita nimirum analogia $a.\ b = c.\ d$, factaque multiplicatione duorum terminorum a, b per m, & duorum c, d per n, erit $am.\ bm = cn.\ dn$. Est enim $am.\ bm = a.\ b$, & $cn.\ dn = c.\ d$ (§ 77.). Ergo, cum sit $a.\ b = c.d$, erit etiam $am.\ bm = cn.\ dn$ (§ 24.)

THEOREMA II.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem quantitatem dividantur, quoti erunt directe, ut ipsæ magnitudines divisæ.

81. Duæ inæquales magnitudines a, b dividantur per eandem e, sitque $\frac{a}{e} = m$, & $\frac{b}{e} = n$. Dico, esse $m.\ n = a.\ b$.

Demonstratio.

Enim vero, cum sit $em = a$, & $en = b$ (§. 72.), erit $emn = an$, & $enm = bm$ (§.68.). Est autem $emn = enm$ (§.9.). Ergo erit etiam $an = bm$, sive $mb = na$ (§. 24.); adeoque $m.\ n = a.\ b$ (§.75.

Co-

COROLLARIUM I.

82. *Si quatuor magnitudines proportionales per eandem dividantur, quoti erunt proportionales.* Nimirum posita analogia $a . b = c . d$, divisisque omnibus terminis per eandem quantitatem e, adeo ut sit $\frac{a}{e} = m$, $\frac{b}{e} = n$, $\frac{c}{e} = p$, & $\frac{d}{e} = q$; erit $m . n = p . q$. Constat enim, esse $m . n = a . b$, sicuti etiam $p . q = c . d$ (§. 81.). Ergo, cum sit $a . b = c . d$, erit quoque $m . n = p . q$ (§. 24.).

COROLLARIUM II.

83. *Si prima, & secunda quatuor magnitudinum proportionalium per eandem quantitatem dividantur, quoti erunt directe, ut tertia ad quartam.* Ut si, posita analogia $a . b = c . d$, magnitudines a, b dividantur per eandem quantitatem e, fueritque $\frac{a}{e} = m$, $\frac{b}{e} = n$, erit $m . n = c . d$. Cum enim sit $m . n = a . b$ (§. 81.), & $a . b = c . d$ per hypothesim; erit quoque $m . = c . d$ (§. 25.).

COROLLARIUM III.

84. *Si prima, & secunda quatuor magnitudinum proportionalium dividantur per unam quantitatem, per aliam vero tertia, & quarta, quoti erunt proportionales.* Videlicet posita analogia $a . b = c . d$, divisisque terminis a, b per m, & c, d per n, ita ut sit $\frac{a}{m} = p$, $\frac{b}{m} = q$, $\frac{c}{n} = x$, & $\frac{d}{n} = y$, erit $p . q = x . y$. Est enim $p . q = a . b$, & $x . y = c . d$ (§. 81.). Ergo, quemadmodum est $a . b = c . d$, erit etiam $p . q = x . y$ (§. 24.).

THEO-

THEOREMA III.

Si eadem magnitudo per duas inæquales dividatur, quoti erunt suis divisoribus reciproce proportionales.

85. Magnitudo a dividatur primo per b, deinde per c; sitque $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{a}{c} = n$. Dico, esse $m . n = c . b$.

Demonstratio.

Enim vero, cum sit tam bm, quam $cn = a$ (§. 72.), erit $bm = cn$ (§. 24.); adeoque $m . n = c . b$ (§. 75.).

TEEOREMA IV.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales multiplicentur, producta erunt proportionalia.

86. Esto $A . a = B . b$, & $D . d = E . e$. Dico, esse etiam $AD . ad = BE . be$.

Demonstratio.

Cum enim propter hypothesim sit $Ab = aB$, & $De = dE$ (§. 73.), erit quoque $AbDe = aBdE$ (§. 68.). Est autem $AbDe$ productum extremarum AD, be, & $aBdE$ est productum mediarum ad, BE. Ergo erit $AD.ad = BE.be$ (§. 75.).

COROLLARIUM.

87. *Si prima & tertia quatuor magnitudinum proportionalium multiplicentur per unam quantitatem, per aliam vero secunda & quarta, producta erunt proportionalia.* Ut si, posita analogia $A.a = B.b$, duo termini A, B multiplicentur per M, & duo a, b per m, erit $AM. am = BM . bm$. Est enim $M. m = M . m$.

THEO-

THEOREMA V.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales dividantur, quoti erunt proportionales.

88. Esto $A.a = B.b$, & $D.d = E.e$. Ponatur autem $\frac{A}{D} = m$, $\frac{a}{d} = n$, $\frac{B}{E} = x$, & $\frac{b}{e} = y$. Dico, esse $m.n = x.y$.

Demonstratio.

Enimvero, cum propter hypothesim sit $Ab = aB$, & $De = dE$ (§. 73.), erit $\frac{Ab}{De} = \frac{aB}{dE}$, sive $my = nx$ (§. 69.). Igitur erit $m.n = x.y$ (§. 75.).

COROLLARIUM.

89. *Si prima & tertia quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem dividantur, per aliam vero secunda & quarta, quoti erunt proportionales.* Ut si, posita analogia $A.a = B.b$, termini A, B dividantur per M, & termini, a, b per m, adeout sit $\frac{A}{M} = p$, $\frac{B}{M} = q$, $\frac{a}{m} = x$, $\frac{b}{m} = y$, erit $p.x = q.y$. Constat enim, esse $M.m = M.m$.

THEOREMA VI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam invertendo, proportionales erunt.

90. Esto $A.a = B.b$. Dico, etiam *invertendo*, esse $a.A = b.B$.

Demonstratio.

Quippe, cum propter hypothesim sit $Ab = aB$ (§. 73). sitque Ab productum mediarum A, b, & aB productum extremarum a, B, erit $a.A = b.B$ (§. 75.).

Co-

COROLLARIUM.

91. *In omni ergo proportionalitate geometrica termini consequentes sunt homologi* (§. 51.).

THEOREMA VII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam alternatim sumtæ proportionales erunt.

92. Esto A . *a* = B . *b*. Dico, etiam *alternando*, esse A . B = *a* . *b*.

Demonstratio.

Cum sit per hypothesim A*b* = *a*B (§. 73.), evidens est, esse A . B = *a*. *b* (§. 75.).

COROLLARIUM I.

93. *Si prima quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis, aut major, vel minor tertia, etiam secunda erit æqualis, aut major, vel minor quarta.* Est enim prima ad tertiam, ut secunda ad quartam.

COROLLARIUM II.

94. *Partes similes duarum magnitudinum sunt directe, ut ipsæ magnitudines; & vicissim magnitudines totales, ut duæ quæcunque partes earum similes.* Ut si magnitudines *a*, *b* fuerint partes similes magnitudinum A. B, erit *a* . *b* = A . B. Cum enim ex hypothesi sit *a* . A = *b* . B (§. 42.), erit quoque *a* . *b* = A . B (§. 92.).

THEO-

THEOREMA VIII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam compositæ proportionales erunt.

95. Esto A . a = B. b. Dico, etiam *componendo*, esse A + a . a = B + b. b.

Demonstratio.

Quippe, cum ex hypothesi sit Ab = aB (§. 73.) erit Ab + ab = aB + ab (§. 26.). Est autem Ab + ab productum extremarum A + a, b, & a B + ab est productum mediarum a, B + b (§. 12.). Ergo erit A + a. a = B + b. b. (§. 75.)

THEORFMA IX.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam divisæ proportionales erunt.

96. Esto A.a = B.b. Dico, etiam *dividendo*, esse A — a . a = B — b. b.

Demonstratio.

Stante hypothesi habetur Ab = a B (§. 73.) Igitur erit Ab — ab = aB — ab (§. 27.). Est autem Ab — ab productum extremarum A — a, b, & aB — ab est productum mediarum a, B — b (§. 12.). Ergo erit A — a . a = B — b. b (§. 75).

THEOREMA X.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam compositæ per conversionem rationis proportionales erunt.

97. Esto A . a = B . b. Dico, etiam *componendo* per *conversionem rationis*, esse A + a . A = B + b. B.

Demonstratio.

Cum enim ex hypothesi sit Ab = aB (§. 73.), erit Ab+AB

= aB

$= aB + AB$ (§.26.). Constat autem, $Ab + AB$ esse productum mediarum $A, B + b$, & $aB + AB$ esse productum extremarum $A + a, B$ (§. 12.). Ergo erit $A + a . A = B + b . B$. (§. 75.).

THEOREMA XI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam divisæ per conversionem rationis proportionales erunt.

98. Esto $A . a = B . b$. Dico, etiam *dividendo per conversionem rationis*, esse $A - a . A = B - b . B$.

Demonstratio.

Enimvero, cum propter hypothesim habeatur $Ab = aB$ (§. 73.), habebitur etiam $AB - aB = AB - Ab$ (§. 27.). Est autem $AB - aB$ productum extremarum $A - a, B$, & $AB - Ab$ est productum mediarum $A, B - b$ (§. 12.). Ergo erit $A - a . A = B - b . B$ (§. 75.).

THEOREMA XII.

Si fuerint plures magnitudines in duplici serie constitutæ ordinatam vel perturbatam rationem habentes, ratio duarum extremarum ex una parte erit æqualis rationi duarum extremarum ex alia.

I.

99. Sint duæ series magnitudinum A, B, D, a, b, d *ordinatam* proportionem habentes. Esto nimirum $A . B = a . b$, & $B . D = b . d$. Dico, esse $A . D = a . d$.

Demonstratio.

Cum enim ex facta hypothesi sit $Ab = Ba$, & $Bd = Db$ (§. 73.), erit $AbBd = BaDb$ (§. 68.); & ideo $\frac{AbBd}{Bb} = \frac{BaDb}{Ba}$ (§. 69.)

(§. 69.). Est autem $\frac{AbBd}{Bb} = Ad$, & $\frac{BaDb}{Ba} = Da$ (§. 17.). Ergo erit $Ad = Da$; ac proinde $A.D = a.d$ (§. 75.)

II.

100. Sint modo duæ series A, B, D, a, b, d *perturbatam* inter se rationem habentes. Videlicet sit $A.B = b.d$, & $B.D = .a.b$. Dico, esse $A.D = a.d$.

Demonstratio.

Quippe, cum ex hypothesi sit $Ad = Bb$, & $Bb = Da$ (§. 73.), erit $Ad = Da$ (§. 24.); & ideo $A.D = a.d$ (§. 75.).

THEOREMA XIII.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionales, summa omnium antecedentium erit ad summam omnium consequentium, ut una antecedentium ad suam consequentem.

101. Esto $A.a = B.b = D.d$. Dico, esse $A + B + D.a + b + d = A.a$.

Demonstratio.

Cum enim sit $A.a = B b. = D.d$, facta hypothesi, ut sit $\frac{A}{a} = m$, erit quoque $\frac{B}{b} = m$, $\frac{D}{d} = m$ (§. 39; ac proinde $am = A$, $bm = B$, & $dm = D$ (§. 72.); & ideo $am + bm + dm = A+B+D$. Est autem $\frac{am+bm—dm}{a+b+d} = m$ (§. 17.). Ergo erit etiam $\frac{A+B+D}{a+b+d} = m$ (§. 69.); ac propterea habebitur $A+B+D.a+b+d = A.a$ (§. 39.).

Co-

COROLLARIUM.

102. *Si duabus magnitudinibus duæ ſimiles partes addantur; tota erunt ipſis magnitudinibus ſimilia.* Ut ſi magnitudines *a*, *b* fuerint ſimiles duabus A, B, iiſdem A, B ſimiles quoque erunt ſummæ A + *a*, B+*b*. Enimvero, cum propter hypotheſim ſit A.B = *a*.*b* (§. 94.), erit quoque A + *a*. B + *b* = A.B (§. 101.).

THEOREMA XIV.

Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, erit etiam reliqua ad reliquam, ut tota ad totam.

103. Magnitudinibus A, B demantur partes *a*, *b*; ſitque A. B = *a*. *b*. Dico, eſſe A — *a*. B — *b* = A. B.

Demonſtratio.

Enimvero, cum ſit A. B = *a*. *b*, erit A.*a* = B. *b* (§. 92.), ac propterea A — *a*. A = B — *b*. B (§. 98.; nec non A — *a*, B — *b* = A. B (§. 92.).

COROLLARIUM.

104. Cum ex hypotheſi partes *a*, *b* ſint ſimiles magnitudinibus totalibus A, B (§. 94.), perſpicuum remanet. *partes ſimiles ſuis totis ſublatas relinquere partes ſimiles.*

THEOREMA XV.

Si antecedentes plurium rationum termini, ſicuti etiam illarum conſequentes, inter ſe mutuo multiplicentur, producta, quæ hinc fiunt, erunt in ratione compoſita ex illis rationibus datis.

105. Multiplicatis terminis antecedentibus A, B, D ra-

tionum $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ fiat productum ABD; multiplicatis vero earundem consequentibus fiat productum *abd*. Dico, productum ABD esse ad productum *abd* in ratione composita ex ipsis rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$

Demonstratio.

Ponatur $\frac{A}{a} = m$, $\frac{B}{b} = n$, $\frac{D}{d} = p$. Igitur erit $am = A$, $bn = B$, $dp = D$ (§. 72.); & ideo $ambndp = ABD$. Constat autem, esse $\frac{ampndp}{abd} = mnp$ (§. 17.). Ergo erit etiam $\frac{ABD}{abd} = mnp$ (§. 69.). Productum porro *mnp* est *exponens* rationis compositæ ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ (§. 53.). Ergo ratio producti ABD ad productum *abd* est composita ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$.

COROLLARIUM I.

106. *Datis ergo quotcunque rationibus, sola multiplicatione antecedentium, & consequentium inter se mutuo respective determinabitur ratio ex illis omnibus composita.*

COROLLARIUM II.

197. *Productum ex ductu primæ quatuor magnitudinum in tertiam est ad productum ex ductu secundæ in quartam in ratione composita ex ratione primæ ad secundam, & ex ratione tertiæ ad quartam. Productum vero ex ductu primæ in secundam est ad productum ex ductu tertiæ in quartam in ratione composita ex ratione primæ ad tertiam, & ex ratione secundæ ad quartam.* Antecedentes enim termini in primo casu sunt *prima*, & *tertia* illarum quatuor magnitudinum; in secundo vero sunt *prima*, & *secunda*.

THEO-

THEOREMA XVI.

Si fuerint quotcunque magnitudines in eadem serie constitutæ, prima erit ad ultimam in ratione composita ex omnibus rationibus intermediis.

108. Esto series magnitudinum a, b, c, d, e. Dico; primam a esse ad ultimam e in ratione *composita* ex rationibus intermediis $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}$:

Demonstratio.

Ratio $\frac{abcd}{bcde}$ est composita ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$; $\frac{d}{e}$ (§. 105.). Est autem $\frac{a}{e} = \frac{abcd}{bcde}$ (§. 77.). Ergo ratio quoque $\frac{a}{e}$ componitur ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}$; adeoque &c.

COROLLARIUM.

109. *Prima quatuor magnitudinum continuo geometrice proportionalium est ad tertiam in ratione* duplicata; *ad quartam vero in ratione* triplicata *sui ipsius ad secundam*. Videlicet, si fuerit $\div a.b.c.d$, ratio $\frac{a}{c}$ erit *duplicata*, & ratio $\frac{a}{d}$ erit *triplicata* rationis $\frac{a}{b}$. Etenim, stante hypothesi, ratio $\frac{a}{c}$ componitur ex duabus rationibus æqualibus rationi $\frac{a}{b}$; ex tribus vero itidem ipsi $\frac{a}{b}$ æqualibus ratio $\frac{a}{d}$; adeoque &c. (§. 54.).

COROLLARIUM II.

110. Viciſſim vero *ratio primæ quatuor magnitudinum continuo proportionalium ad ſecundam eſt* ſubduplicata *rationis ipſius primæ ad tertiam*; ſubtriplicata *vero ejuſdem primæ ad quartam* (§. 57.).

THEOREMA XVII.

Si fuerint quatuor magnitudines continuo geometrice proportionales, quadratum primæ erit ad quadratum ſecundæ, ut prima ad tertiam; cubus vero primæ ad cubum ſecundæ, ut prima ad quartam.

I.

111. Eſto ∺ *a.b.c.d.* Dico 1., eſſe *aa.bb* ═ *a.c.*

Demonſtratio.

Cum enim ſit ∺ *a.b.c*, erit *ac* ═ *bb* (§. 74.); adeoque *aac* ═ *bba* (§. 68.); & ideo *aa.bb* ═ *a.c* (§. 75.).

I I.

112. Dico 2., eſſe *aaa.bbb* ═ *a.d.*

Demonſtratio.

Enimvero, cum ſit *a.b* ═ *c.d*, erit quoque *a.c* ═ *b.d* (§. 92.). Oſtenſum eſt autem, eſſe *aa.bb* ═ *a.c* (§. 111.). Ergo erit etiam *aa.bb* ═ *b.d* (§. 25); adeoque *aad* ═ *bbb* (§. 73.); necnon *aaad* ═ *bbba* (§. 68.); & ideo *aaa.bbb* ═ *a.d* (§. 75.)

COROLLARIUM I.

113. Cum ratio primæ quatuor magnitudinum continuo

nuo geometrice proportionalium ad tertiam ſit *duplicata*: ratio vero ejuſdem primæ ad quartam ſit *triplicata* ejuſdem primæ ad ſecundam (§. 109.), *magnitudines quadratæ ſunt in ratione* duplicata; *magnitudines vero cubicæ ſunt in ratione* triplicata *ſuarum radicum*.

COROLLARIUM III.

114. Viciſſim vero *radices quadratæ ſunt in ratione* ſubduplicata; & *radices cubicæ in ratione* ſubtriplicata *ſuarum poteſtatum* (§. 110.).

SECTIO SECUNDA.

De linea recta.

CAPUT I.

De linea recta, quatenus alteri rectæ inſiſtit, vel alteram ſecat.

DEFINITIO I.

115. P*Unctum eſt, cujus pars nulla*. Videlicet id omne conſideratur ſub ratione *puncti*, quod ita ſpectatur atque ſumitur, perinde ac ſi reipſa nullam partem, nullamque extenſionem haberet.

DEFINITIO II.

116. *Linea eſt longitudo omnis prorſus latitudinis & profunditatis expers*. Nempe *linea* eſt talis magnitudo, quæ licet reipſa non ſolum ſit longa, verum etiam lata & profunda, ſola tamen longitudo in illa ſpectatur. Illius extrema, ſi ſit finita, ſunt puncta. Dividitur autem linea in *rectam*, *curvam*, & *mixtam*.

DEFINITIO III.

117. *Linea recta dicitur illa, quæ suis ex æquo interjicitur punctis*, sive, ut ait Plato, *recta linea ea est, cujus media extremis obumbrantur*, ut linea AB (*fig* 1. *Tab.* I.). *Curva est illa, quæ inter sua extrema extollitur, vel deprimitur*, ut linea CD (*fig.*2.). *Mixta vero, cujus una pars est linea recta, altera curva*.

DEFINITIO IV.

118. *Angulus planus est duarum linearum in uno puncto concurrentium mutua quædam inclinatio*. Sic inclinatio mutua duarum linearum AB, CB (*fig* 3. *Tab.* I.) concurrentium in puncto B, *angulus* dicitur. Porro punctum B concursus dicitur *apex anguli*, isque indicatur media trium literarum, quibus angulus ipse exprimitur. Lineæ vero AB, CB *anguli crura* nuncupantur. Dividitur autem *angulus* in *rectilineum*, *curvilineum*, & *mixtilineum*. *Rectilineus* vocatur angulus, si lineæ ipsum constituentes sint rectæ. *Curvilineus*, si omnes sint curvæ. *Mixtilineus*, si altera sit recta, altera curva. *Angulus rectilineus*, de quo dumtaxat in præsens agimus, dividitur in *rectum*, *acutum*, & *obtusum*.

SCHOLION.

119. Animadvertere plurimum interest, *anguli magnitudinem* non ex linearum ipsum constituentium longitudine, sed ex illarum distractione a se mutuo repetendam esse, ita nimirum, ut *ille angulus sit major, cujus crura magis sunt distracta, licet longitudine sint minora; illi vero sint æquales, cujus crura, licet magnitudine inæqualia sint, æque tamen distracta sunt a se mutuo*.

DEFINITIO V.

120. *Angulus rectus vocatur ille, qui, alterutra rectarum ipsum*

ipsum constituentium directe per apicem producta, angulum habet ex altera parte sibi æqualem. *Rectus* nimirum erit angulus ABC (*fig*.4.*Tab*.1.), si directe producta recta CB in D, angulus DBA hinc emergens, angulo ABC fuerit æqualis.

COROLLARIUM.

121. *Si ergo alterum crus anguli recti in directum per apicem producatur, alter rectus angulus efficitur*.

DEFINITIO VI.

122. *Angulus acutus est ille, qui a recto deficit*. *Obtusus vero, qui rectum excedit*. Sic *acutus* est angulus EBC; *obtusus* autem angulus DBC (*fig*.5.*Tab*.I.), nam ille est minor hic vero major angulo recto ABC.

DEFINITIO VII.

123. *Recta linea dicitur alteri rectæ perpendicularis, quæ ita illi insistit, ut duos hinc inde angulos rectos efficiat*. Sic recta AB (*fig*.4.Tab.I.) erit *perpendicularis* rectæ DC, si recti fuerint anguli ABD, ABC.

DEFINITIO VIII.

124. Si una recta linea AB (*fig*.6.*Tab*.I.) alteram secet DC in puncto E, atque adeo quatuor efficiat angulos in ipso punto E, duo anguli AEC, DEB, sicuti etiam duo AED, CEB, dicuntur *ad verticem oppositi*.

DEFINITIO IX.

125. *Duæ lineæ dicuntur habere segmentum commune, cum una pars utrique communis est, ceteræ vero diversæ*. Sic duæ lineæ ABC, ABD (*fig*.7.*Tab*.I.) dicuntur commune habere seg-

segmentum AB; quia pars AB est utrique communis: *Duæ vero rectæ vocantur in directum positæ, quæ, veluti partes, unam eandemque rectam constituunt.*

AXIOMA.

126. *Omnes anguli recti sunt inter se æquales*: Omnes enim habent crura æque distracta.

THEOREMA I.

Recta super rectam consistens duos efficit angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales.

127. Rectæ AB (*fig.* 8. *Tab.* I.) altera insistat recta CD, duos cum illa efficiens angulos CDB, CDA. Dico, duos hujusmodi angulos vel esse rectos, vel duos æquare rectos, si simul sumantur.

Demonstratio.

Etenim vel recta CD est perpendicularis rectæ AB, vel non. Si est perpendicularis, patet propositum (§. 123.). Si vero non est perpendicularis, erecta intelligatur ex puncto D perpendicularis DE. Itaque, cum duo anguli EDA, EDB sint recti (§. 123), tresque anguli CDA, CDE, EDB simul sumpti adæquent duos EDA, EDB (§. 22), tres anguli CDA, CDE, EDB summam æquabunt duorum rectorum. Duo autem anguli CDE, EDB adæquant angulum CDB (§. 22.), ut proinde duo anguli ADC, CDB æquales sint tribus ADC, CDE, EDB. Ergo duo quoque anguli ADC, CDB duobus rectis erunt æquales (§. 25.) Recta igitur &c.

COROLLARIUM.

128. *Si plures rectæ lineæ eidem rectæ in eodem plano ad idem punctum insistant, omnes anguli, qui ab illis fiunt, sunt duobus rectis æquales.* Sunt enim duo recti in plures divisi.

Co-

COROLLARIUM II.

129. *Duæ rectæ lineæ sese mutuo secantes quatuor efficiunt angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales.* Quatuor nimirum anguli AEC, CEB, BED, DEA (*fig.6. Tab. I.*) producti in eodem plano a duabus rectis AB, CD sese mutuo secantibus in puncto E, vel recti sunt, vel sunt quatuor rectis æquales. Etenim tam duo AEC, CEB, quam duo AED, DEB vel sunt recti, vel duos rectos adæquant.

COROLLARIUM III.

130. Hinc *omnes anguli, qui fiunt in eodem plano circa idem punctum, simul sumpti, conficiunt summam quatuor rectorum.*

COROLLARIUM IV.

131. *Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune.* Si namque duæ lineæ ABC, ABD (*fig. 7. Tab.I.*) commune habentes segmentum AB, essent rectæ, erecta utcunque ex puncto B recta BE, cum duo anguli ABE, EBC æquales sint duobus ABE, ABD (§ 24.), utpote quod tam illi, quam isti duos rectos propter hypothesim adæquent (§. 127.) sublato communi ABE, reliquus EBC reliquo EBD esset æqualis (§. 27); atque adeó pars toti, quod repugnat (§.23).

COROLARIUM V.

132. *Si ad datam rectam lineam ad datum in ea punctum duæ rectæ lineæ ex oppositis partibus ductæ, duos angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt illæ duæ rectæ lineæ.* In directum scilicet erunt duæ AB, FB (*fig.7. Tab.I.*) ductæ ex oppositis partibus ad idem punctum B, si duo anguli ABE, EBF, quos efficiunt cum recta EB, fuerint recti, vel duobus rectis æquales. Etenim, si secus, in directum

ctum

ctum producta ad partem B recta AB, cadet vel supra rectam BF ad partem C, & sic efficiet cum recta EB duos angulos ABE, EBC minores duobus rectis, utpote minores duobus ABE, EBF; vel cadet infra rectam BF ad partem D, ac proinde duos producet angulos ABE, EBD majores duobus rectis, utpote majores duobus ABE, EBF. Utrumque autem repugnat (§. 127.). Ergo &c.

THEOREMA II.

Ad datam rectam lineam e puncto in illa sumto una tantum recta perpendicularis in eodem plano ad eandem partem excitari potest.

133. Ex puncto D sumto in recta AB (*fig.* 8. *Tab.* I.) erecta intelligatur in eodem plano ad eandem partem recta DE ipsi AB perpendicularis. Dico, nullam aliam rectam ex eodem puncto D ad eandem partem in eodem plano excitari posse, quæ ipsi rectæ AB ad perpendiculum itidem incumbat.

Demonstratio.

Quippe si fieri potest, esto alia perpendicularis DC. Igitur angulus CDA erit rectus (§. 123.); isque propterea æquabit angulum ADE (§. 126.); utpote qui eadem ratione rectus est. Angulus autem CDA est pars anguli ADE. Ergo pars æquabit totum. Hoc autem repugnat (§. 23.). Ergo &c.

THEOREMA III.

Anguli ad verticem oppositi, qui a duabus rectis lineis sese mutuo secantibus producuntur, sunt æquales.

134. Duæ rectæ AB, CD (*fig.* 6 *Tab.* I.) sese mutuo secent in puncto E. Dico, angulos ad verticem oppositos AEC, DEB esse inter se æquales.

Demonstratio.

Cum enim tam duo DEA, AEC, quam duo DEA, DEB va-

valeant duos rectos (§.127.) duo DEA, AEC æquabunt duos DEA, DEB (§. 24.). Igitur, sublato communi DEA, reliquus AEC erit reliquo DEB æqualis (§. 27.). Eodem modo ostendentur æquales etiam duo DEA, CEB. Itaque &c.

COROLLARIUM. I.

135. *Si unus quatuor angulorum, qui a duabus rectis sese mutuo secantibus producuntur, fuerit rectus, ceteri quoque omnes erunt recti.* Nimirum si rectus fuerit angulus AEC (*fig. 6. Tab.* I.) etiam reliqui AED, DEB, BEC erunt recti. Quippe, stante hypothesi, rectus erit angulus AED (§. 120). Igitur etiam duo DEB, CEB illis ad verticem *respective* oppositi, erunt recti.

COROLLARIUM II.

136. *Si recta perpendiculariter rectæ insistens infra illam directe producatur, etiam inferius segmentum erit eidem rectæ perpendiculare.* Videlicet directe producta recta perpendiculari AE in B, segmentum quoque EB erit eidem rectæ DC perpendiculare. Patet ex præcedenti.

COROLLARIUM III.

137. *Si quatuor rectæ lineæ ex eodem puncto in eodem plano ductæ, angulos ad verticem oppositos æquales fecerint, erunt duæ ex adverso in directum positæ.* Ut si quatuor rectæ EA, EB, ED, EC ex eodem puncto E in eodem plano erumpentes, fecerit angulos ad verticem oppositos AEC, DEB, sicuti etiam AED, CEB, inter se æquales, tam duæ rectæ AE, EB, quam duæ DE, EC erunt in directum positæ. Etenim, si secus, duæ rectæ lineæ sese mutuo secantes, haudquaquam efficerent angulos ad verticem oppositos inter se æquales.

CA-

CAPUT II.

De rectis lineis parallelis.

DEFINITIO I.

138. *Rectæ lineæ parallelæ dicuntur illæ, quæ ubique æqualiter inter se distant*. Hujusmodi sunt rectæ AB, CD (*fig.* 9. *Tab.* I.); cum eadem ubique sit illarum a se mutuo distantia.

COROLLARIUM I.

139. Hinc *perpendiculares omnes* ad, cd, ef *inter rectas parallelas AB, CD comprehensæ, sunt inter se æquales*.

COROLLARIUM II.

140. *Rectæ parallelæ, etsi in infinitum ad eandem partem producantur, nunquam possunt sibi mutuo in puncto occurrere.*

DEFINITIO II.

141. Contra vero *illæ duæ rectæ lineæ dicuntur non parallelæ inter se, quæ non ubique æqualiter inter se distant*. Sic duæ rectæ AB, CD (*fig.* 10. *Tab.* I.) non sunt parallelæ, quia eadem ubique non est illarum a se mutuo distantia.

DEFINITIO III.

142. Incidente recta EF in duas rectas parallelas AB, CD (*fig.* 11. *Tab.* I.) duo anguli BGH, GHD dicuntur *interni ad easdem partes*, sicuti etiam duo AGH, GHC. Duo BGH, GHC, quemadmodum & duo AGH, GHD, vocantur *alterni*. Angulus vero EGB dicitur *externus*; at vero *internus ad easdem partes* angulus GHD.

LEM-

LEMMA.

Si, recta EF (fig. 11. Tab. I.) *incidente in duas rectas AB, CD, duo anguli interni BGH, GHD æquales fuerint duobus internis AGH, GHC, duæ rectæ AB, CD erunt parallelæ.*

143. Etenim, stante illa angulorum æqualitate, nulla est ratio, cur rectæ AB, CD accedere sibi mutuo debeant ad partes B, D potius quam ad partes A, C si ad eas directe producantur. Ergo rectæ AB, CD æqualiter ubique distant a se mutuo; atque adeo sunt parallelæ (§. 138.).

THEOREMA I.

Si, recta in duas rectas incidente, duo anguli iuterni ad easdem partes fuerint æquales duobus rectis, illæ duæ rectæ lineæ erunt inter se parallelæ.

144. Recta EF (*fig.* 11. *Tab.* I.) incidat in rectas AB, CD, sintque duo anguli BGH, GHD interni ad easdem partes duobus rectis æquales. Dico, rectas AB, CD esse inter se parallelas.

Demonstratio.

Cum enim tam duo BGH, AGH, quam duo GHC, GHD valeant duos rectos (§. 127.), quatuor anguli BGH, AGH, GHC, GHD erunt quatuor rectis æquales. Quamobrem, si duo BGH, GHD æquales fuerint duobus rectis, duobus quoque rectis æquales erunt duo AGH, GHC; ac proinde duo BGH, GHD æquabunt duos AGH, GHC (§. 24.). Igitur duæ rectæ, AB, CD erunt parallelæ (§. 144.); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

145. *Si recta incidens in duas rectas fuerit utrique perpendicularis, illæ erunt parallelæ.* Parallelæ nimirum erunt rectæ

AB,

AB, CD (*fig.* 9. *Tab.* I.) si recta *ab* in illas incidens, fuerit utrique perpendicularis. Hoc enim ipso recti sunt duo anguli interni B*ab*, D*ba* (§. 123.).

COROLLARIUM II.

149. *Si, recta in duas rectas incidente, angulus externus æqualis fuerit interno opposito, illæ erunt parallelæ.* Videlicet rectæ AB, CD (*fig.* 11. *Tab.* I.) erunt parallelæ, si angulus EGB æqualis fuerit angulo GHD. Cum enim duo anguli EGB, BGH valeant duos rectos (§. 127.) etiam duo GHD, BGH erunt hoc ipso duobus rectis æquales.

COROLLARIUM III.

147. *Si, recta in duas rectas incidente, anguli alterni æquales fuerint, illæ erunt parallelæ.* Sic parallelæ erunt rectæ AB, CD (*fig.* 11. *Tab.* I.), si anguli alterni AGH, GHD fuerint æquales. Nam, hac stante hypothesi, cum duo anguli AGH, BGH æquales sint duobus rectis (§. 127.) duo quoque BGH, GHD duos rectos æquabunt.

THEOREMA II.

Recta incidens in duas rectas parallelas, angulos internos ad easdem partes duobus rectis æquales efficit.

148. Parallelæ sint rectæ AB, CD (*fig.* 11. *Tab.* I.) in quas incidat recta EF. Dico, angulos internos ad easdem partes BGH, GHD æquales esse duobus rectis.

Demonstratio.

Cum enim duo anguli BGH, GHD æquales sint duobus AGH, GHC (§. 143.); & ipsi omnes simul sumti quatuor rectos adæquent, quod scilicet tam duo AGH, BGH, quam duo GHC, GHD sint duobus rectis æquales (§. 127.), rema-

remanet, duos internos BGH, GHD æquales esse duobus rectis; ac proinde &c.

COROLLARIUM I.

149. *Recta uni rectarum parallelarum perpendicularis, alteri quoque est perpendicularis.* Ut si uni CD rectarum parallelarum AB. CD (*fig.* 9. *Tab.* I.) perpendicularis fuerit recta *ab*, alteri quoque AB ipsa recta *ab* erit perpendicularis. Quippe, cum duo anguli B*ab*, D*ba* valeant ex hypothesi duos rectos, & angulus *ab*D iidem ex hypothesi sit rectus (§. 123.) rectus quoque erit angulus B*ab*.

COROLLARIUM II.

150. *Recta in duas rectas parallelas incidente, angulus externus internum ad easdem partes adæquat.* Angulus nimirum EGB (*fig.* 11 *Tab* I.) æquabit angulum GHD, si rectæ AB, CD fuerint parallelæ Cum enim tam duo EGB, BGH (§. 127), quam duo BGH, GHD (§. 148.) valeant duos rectos, adeoque illi duo his duobus sint æquales (§. 24.), sublato communi BGH, reliquus EGB reliquum GHD æquabit (§. 27.).

COROLLARIUM III.

151. *Recta in duas rectas parallelas incidente, anguli alterni sunt æquales.* Sic anguli alterni AGH, GHD (*fig.* 11 *Tab.* I.) æquales sunt inter se. Nam, cum duo AGH, BGH æquales sint duobus BGH, GHD (§. 24.), quod tam illi (§. 127.) quam isti (§ 148) valeant duos rectos, sublato communi BGH, erit reliquus AGH reliquo GHD æqualis (§. 27.).

THEOREMA III.

Quæ eidem rectæ sunt parelellæ etiam inter se sunt parallelæ; & quæ uni rectarum parallelarum parallela est, alteri quoque eorundem est parallela.

I.

152. Eidem rectæ CD (*fig.* 9. *Tab. I.*) parallelæ sint duæ AB. EF. Dico, duas AB, EF etiam inter se esse parallelas.

Demonstratio.

Etenim, stante hypothesi, tam perpendicula *ab*, *ef*, quam perpendicula *bm*, *fn* sunt æqualia inter se (§. 139.). Ergo etiam perpendicula *am*, *en* erunt æqualia (§. 26.); & ideo rectæ AB, EF erunt parallelæ (§. 138.).

II.

153. Uni AB rectarum parallelarum AB, CD (*fig.* 9. *Tab.* I.) parallela sit recta EF. Dico, rectam EF etiam alteri CD esse parallelam.

Demonstratio.

Cum enim propter hypothesim perpendicula *ab*, *ef* sint æqualia, sicuti etiam perpendicula *am*, *en* (§. 139.), sublatis æqualibus *ab*, *ef*, etiam reliqua perpendicula *bm*, *fn* erunt æqualia (§. 27.). Ergo rectæ quoque CD, EF sunt parallelæ (§. 138.).

SE-

SECTIO TERTIA

De figuris planis.

DEFINITIO I.

154. *Superficies est magnitudo duplici tantum dimensione, longitudinis nempe, & latitudinis, prædita.* Videlicet magnitudo corporea spectatur sub ratione *superficiei*, si quatenus dumtaxat longa, & lata est, consideretur. Dividitur porro *superficies* in *planam*, *curvam*, & *mixtam*, ut de *linea* diximus; & sicuti extrema *lineæ* finitæ sunt *puncta*, ita extrema finitæ *superficiei* sunt *lineæ*.

DEFINITIO II.

155. *Figura* generatim sumta *est magnitudo pluribus dimensionibus prædita, undique terminata*. Dicitur: *pluribus dimensionibus prædita*; quia linea finita non est figura.

DEFINITIO III.

156. *Figura plana est plana superficies una vel pluribus lineis undique terminata*. Habita idcirco ratione linearum, quibus continetur; dividitur figura in *rectilineam*, *curvi lineam*, & *mixtam*. Figura *rectilinea est illa, quæ rectis lineis; curvilinea, quæ una vel pluribus curvis lineis; mixta vero, quæ curva rectaque linea comprehenditur.*

DEFINITIO IV.

157. *Rectæ, quibus figura rectilinea terminatur, illius latera dicuntur. Omnes illæ simul sumtæ ipsius figuræ* perimeter, *sive* ambitus, *vocari solent. Area vero figuræ est totum illud spa-*

tium, quod figuræ perimetro comprehenditur. Sic *latera* figuræ ABC (*fig.* 12. *Tab.* I.) ejusque *perimeter*, sunt rectæ AB, BC, CA; *area* vero est spatium rectis AB, BC, CA contentum.

DEFINITIO V.

158. *Basis figuræ rectilineæ est illud latus, cui illa incumbit. Vertex figuræ est illud perimetri punctum, quod basi oppositum est, atque ab ipsa basi maxime distat. Altitudo vero est recta linea perpendicularis ducta a vertice in basim*. Ut si figura rectilinea BAC (*fig.* 12. *Tab.* I.) incumbere intelligatur lateri BC, latus ipsum BC erit illius *basis*; *vertex* punctum A, & *altitudo* recta A*a*: ubi notandum, altitudinem figuræ non semper cadere intra latera, sed quandoque uni eorum congruere, nec raro extra basim etiam cadere.

DEFINITIO VI.

159. *Illa figura rectilinea dicitur æquilatera, cujus omnia latera æqualia sunt inter se; illa vero æquiangula cujus omnes anguli sunt æquales*. Ut si tria latera AB, BC, CA figuræ rectilineæ ABC (*fig.* 12. *Tab.* I.) æqualia fuerint inter se, figura ipsa erit *æquilatera*. Si autem æquales fuerint inter se tres ipsius anguli A, B, C, *æquiangula* nuncupabitur.

DEFINITIO VII.

160. *Duæ figuræ rectilineæ dicuntur inter se mutuo æquilateræ, cum latera unius æqualia sunt lateribus alterius, alterum alteri. Dicuntur vero æquiangulæ, cum anguli unius æquales sunt angulis alterius, alter alteri*. Nimirum *æquilateræ* inter se mutuo erunt duæ figuræ ABC, *abc* (*fig.* 12. *fig.* 13.) si fuerit AB $=$ *ab*, BC $=$ *bc*, CA $=$ *ca*. Erunt vero inter se *æquiangulæ*, si angulus A æqualis fuerit angulo *a*, angulus B angulo *b*, & angulus C angulo *c*.

DE-

DEFINITIO VIII.

161. *Figura rectilinea regularis vocatur illa quæ simul æquilatera est, & æquiangula*. Contra vero *illa irregularis nuncupatur, quæ vel latera habet inæqualia, vel inæquales angulos, vel nec angulos, nec latera habet æqualia.*

DEFINITIO IX.

162. *Duæ quantitates dicuntur sibi mutuo congruere, quando earum una alteri superposita, ipsarum termini coincidunt.*

COROLLARIUM I.

163. *Quæ sibi mutuo perfecte congruunt, sunt æqualia.* Hoc enim ipso sic se habent, ut neutrum illorum alterum excedat, neque ab illo excedatur.

COROLLARIUM II.

164. *Figuræ rectilineæ, quæ sibi mutuo perfecte congruunt, sunt inter se mutuo æquilateræ, & æquiangulæ*. Latera quippe unius sunt hoc ipso æqualia lateribus alterius, alterum alteri, sicuti etiam ipsarum anguli.

COROLLARIUM III.

165. *Figuræ rectilineæ inter se mutuo æquilateræ, & æquiangulæ sunt æquales*. Congruunt enim sibi mutuo, si earum una alteri superponatur.

CAPUT I.

De triangulis planis rectilineis.

DEFINITIO I.

166. *Triangulum planum est figura plana tribus tantum lineis terminata, totidemque angulos continens.* Si omnia ipsius latera, sint lineæ rectæ, triangulum dicitur *rectilineum*; *curvilineum*, si omnes fuerit curvæ; *mixtilineum*, si altera linearum, quibus clauditur, fuerit recta, altera curva. Habita ratione laterum, dividitur triangulum planum rectilineum, de quo dumtaxat in præsens agimus, in *æquilaterum*, *isosceles*, & *scalenum*. Habita vero ratione angulorum, divitur in *rectangulum*, *amblygonium*, & *oxygonium*.

DEFINITIO II.

167. *Triangulum æquilaterum est illud, cujus tria latera sunt inter se æqualia*, cujusmodi est triangulum ABC (*fig.* 12. *Tab.* I.) cum sit AB $=$ BC $=$ CA. *Triangulum isosceles est illud, cujus duo latera sunt æqualia*, ut triangulum *abc* (*fig.* 13.). *Scalenum vero, cujus omnia latera sunt inæqualia*, ut DEF (*fig.* 14.).

COROLLARIUM.

168. Cum etiam triangulum *æquilaterum* spectari possit, veluti habens duo latera æqualia, *omne triangulum æquilaterum est isosceles*, licet non omne *isosceles* sit *æquilaterum*.

DEFINITIO III.

169. *Triangulum rectangulum dicitur illud, quod unum trium angulorum habet rectum*, ut triangulum DEF. (*fig.* 14. *Tab.* I.). cujus angulus DEF est rectus. *Amblygonium, cujus unus angulo-*

gulorum est obtusus, ut triangulum ABC (*fig* 15.). *Oxygonium vero, cujus tres anguli sunt acuti*, ut triangulum *abc* (*fig*.13.).

DEFINITIO IV.

170. *Hypotenusa trianguli rectanguli dicitur illud latus, quod recto ipsius angulo opponitur*. Sic in triangulo rectangulo DEF (*fig*. 14. *Tab*. I.) latus DF oppositum angulo recto DEF *hypotenusa* nuncupatur.

AXIOMA.

171 *Recta linea est minor quavis curva, quæ eadem cum illa extrema habeat*. Sic recta CD (*fig*. 2. *Tab*. I.) est minor curva eadem habente extrema C, D.

THEOREMA I.

Tres anguli cujuslibet trianguli plani rectilinei simul sumti conficiunt summam duorum rectorum.

172. Esto triangulum planum rectilineum ABC (*fig* 15. *Tab*. I.). Dico, tres ipsius angulos A, B, C summam æquare duorum rectorum, si simul sumantur.

Demonstratio.

Per verticem A ducta intelligatur recta EF parallela basi BC. Itaque, cum anguli alterni ABC, EAB æquales sint inter se, sicuti etiam anguli alterni ACB, FAC (§. 151.), tres ABC, BAC, ACB æquales erunt tribus EAB, BAC, FAC (§. 26.). Tres autem anguli EAB, BAC, FAC valent duos rectos (§. 128.). Ergo tres quoque ABC, BAC, ACB simul sumti duos rectos æquabunt (§. 25.); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

173. *Omnes trianguli plani rectilinei duo quicunque anguli minores sunt duobus rectis*; atque hinc

COROLLARIUM II.

174. *Una tantum recta perpendicularis a dato puncto ad datam rectam duci potest*. Si namque duæ rectæ *ab*, *ac* (*fig.* 13. *Tab.* I.) possent eidem rectæ *bc* ad perpendiculum incumbere, cum uterque angulus *abc*, *acb* sit rectus (§. 123.), in triangulo *abc* duo anguli duos rectos æquarent.

COROLLARIUM III.

175. *Quilibet angulus trianguli regularis adæquat tertiam partem duorum rectorum, sive duos trientes unius recti*. Sunt enim omnes inter se æquales. Quamobrem *omnia triangula regularia sunt inter se mutuo æquiangula*.

COROLLARIUM IV.

176. *Si unus angulorum trianguli rectus est, vel obtusus, reliqui duo sunt acuti*.

COROLLARIUM V.

177. *Si unus trianguli angulus fuerit rectus, reliqui duo summam unius recti conficiunt; & vicissim, si duo anguli unius trianguli conficiunt summam unius recti, reliquus est rectus*.

COROLLARIUM VI.

178. *Tres anguli unius trianguli simul sumti æquales sunt tribus angulis alterius trianguli simul iisdem sumtis* (§. 24.); adeoque *si duo anguli unius trianguli æquales fuerint duobus angulis alterius trianguli, etiam reliquus erit reliquo æqualis* (§. 27.).

COROLLARIUM VII.

179. *Omnis trianguli plani rectilinei uno latere directe producto*,

ducto, externus angulus æqualis est duobus internis oppositis simul sumtis. Directe nimirum producto latere BC in D trianguli ABC (*fig* 15. *Tab.* I.) angulus externus ACD adæquat duos simul sumtos CAB, ABC. Cum enim duo anguli ACB, ACD sint æquales duobus rectis (§. 127.), adeoque tribus ABC, BCA, CAB (§ 25), sublato communi ACB, erit reliquus ACD reliquis duobus CAB, ABC æqualis (§. 27.).

COROLLARIUM VIII.

180. Hinc *omnis trianguli plani rectilinei, uno latere directe producto, externus angulus major est interno opposito*. Angulus nimirum ACD major est tum angulo ABC, tum angulo CAB.

THEOREMA II.

Omnis trianguli plani rectilinei duo quælibet latera simul sumta reliquo sunt majora.

181. Esto triangulum planum rectilineum ABC (*fig.* 15.). Dico, duo ipsius latera AB, BC simul sumta majora esse reliquo AC.

Demonstratio.

Cum enim duo latera AB, BC spectari possint veluti linea curva, eadem habens extrema cum recta, sive latere AC, patet, duo latera AB, BC simul sumta rectam excedere AC (§. 171.).

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rectilineo ille angulus major est, qui majori lateri opponitur; & vicissim illud latus est majus, quod majorem angulum subtendit.

I.

182. Latus DF trianguli DEF (*fig.* 14. *Tab.* I.) sit majus latere EF. Dico, angulum quoque DEF majorem esse angulo EDF.

De-

Demonstratio.

Magis enim distracta sunt ob hypothesim duo latera DE, EF, quam duo DE, DF.

II.

183. Vicissim vero angulus DEF sit major angulo EDF. Dico, etiam latus DF majus esse latere EF.

Demonstratio.

Cum enim ob excessum anguli DEF supra angulum EDF, magis distracta sinu latera DE, EF, quam latera DE, DF, latus DF majus necessario erit latere EF (§. 119).

COROLLARIUM I.

184. *Omnis trianguli, cujus inaequalia sint latera, inaequales sunt anguli;* & vicissim *omnis trianguli, cujus inaequales sint anguli, inaequalia sunt latera.*

COROLLARIUM II.

185. *Perpendicularis minima est omnium rectarum, quae ab eodem puncto in rectam lineam cadere possunt.* Sic perpendicularis A*a* (*fig.* 12. *T.* I.), minor est recta AB, & eadem ratione omnibus aliis, quae a puncto A in rectam BC duci queunt. Cum enim angulus A*a*B in triangulo BA*a*, utpote rectus (§. 123.), sit major angulo AB*a*, qui est acutus (§. 176.), recta AB major erit recta A*a* (§. 183.)

SCHOLION.

186. Hinc apparet, cur penes perpendicularem dimensio

ſio quæque ſumatur. Hoc enim ipſo, quod illa omnium rectarum, penes quas menſura ſumi poteſt, ſit minima, certa eſt atque determinata apud omnes, prout ad menſuram requiritur. Et hinc ratio etiam ſumitur, cur tres tantum in quantitate continua permanenti ſint dimenſiones. Enimvero nonniſi tres rectæ lineæ ſibi invicem perpendiculares per idem punctum deduci poſſunt.

THEOREMA IV.

Omnis trianguli, cujus duo latera ſunt æqualia, æquales ſunt duo anguli illis oppoſiti; & viciſſim omnis trianguli, cujus duo æquales ſunt anguli, æqualia ſunt duo latera illis ſubtenſa.

I.

187. Trianguli *bac* (*fig.* 13. *Tab.* I.) æqualia ſint duo latera *ab*, *ac*. Dico, duos angulos *abc*, *acb* eſſe æquales.

Demonſtratio.

Quippe, ſtante æqualitate laterum *ab*, *ac*, diſtractiones laterum *ac*, *bc*, & laterum *ac*, *cb* ſunt æquales; adeoque &c. (§. 119.).

II.

188. Viciſſim trianguli *abc* æquales ſint anguli *abc*, *acb*. Dico, etiam latera *ab*, *ac* eſſe æqualia.

Demonſtratio.

Cum enim ob æqualitatem angulorum *abc*, *acb*, diſtractio laterum *ab*, *ac* adæquet diſtractionem laterum *ab*, *cb*, duo latera *ab*, *ac* neceſſario erunt æqualia.

Co-

COROLLARIUM I.

189. *Omne triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum; & omne triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum*; atque hinc

COROLLARIUM II.

190. *Omne triangulum tam æquilaterum, quam æquiangulum est regulare* (§. 161.).

THEOREMA V.

Si in triangulo plano rectilineo punctum aliquod sumatur, a quo duæ rectæ ad extrema basis ducantur; illæ minores erunt lateribus ipsius trianguli, sed majorem angulum continebunt.

191. Esto triangulum planum rectilineum ABC (*fig.* 16. *Tab.* I.) in quo punctum aliquot sumatur,

Primus Casus.

Et quidem primo in latere AB, sitque illud punctum *b*, a quo ad extremum C basis BC ducatur recta *b*C. Dico, duas *b*B, *b*C minores esse lateribus AB, AC, sed angulum B*b*C majorem esse angulo BAC.

Demonstratio.

Cum enim duo latera A*b*, AC majora sint reliquo *b*C (§. 181.), summa A*b* + *b*B + AC major quoque erit summa *b*C + *b*B (§. 28.). Rursus, cum angulus B*b*C spectari possit veluti externus trianguli *b*CA, liquido apparet, ipsum B*b*C majorem esse angulo BAC (§. 180.).

Secundus Casus.

Modo sumatur punctum *a* in area trianguli, & ducantur re-

rectæ *a*B, *a*C. Dico, duas *a*B, *a*C minores eſſe duobus lateribus AB, AC, ſed angulum B*a*C excedere angulum BAC.

Demonſtratio.

Directe producta C*a* in *b*, cum duo latera B*b*, *ba* trianguli B*ba* majora ſint reliquo B*a* (§. 181.), addito latere *a*C, erunt duo B*b*, *b*C majora duobus B*a*, *a*C (§. 28.). Oſtenſum eſt autem, duo latera AB, AC excedere duo *b*B, *b*C. Ergo duo AB, AC duo quoque excedent *a*B, *a*C. Rurſus angulus B*a*C major eſt angulo B*b*C, & angulus B*b*C angulo BAC (§. 180.). Ergo angulus B*a*C major itidem erit angulo BAC; adeoque &c.

THEOREMA VI.

Duo qualibet triangula inter ſe mutuo æqailatera ſunt inter ſe æqualia.

192. Sint duo triangula ABC, *abc* (*fig.* 17. 18. *Tab.* I.) inter ſe mutuo æquilatera, nempe latus AB ſit æquale lateri *ab*, latus BC lateri *bc*, & latus AC lateri *ac*. Dico, illa duo triangula eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

Hujuſmodi enim ſunt, ut, ſi unum alteri ſuperponatur, ſibi mutuo perfecte congruant. Hinc

COROLLARIUM I.

193. *Duo triangula inter ſe mutuo æquilatera, ſunt etiam inter ſe mutuo æquiangula.* Non enim poſſunt illa ſibi mutuo perfecte congruere, niſi ſibi itidem mutuo perfecte congruant anguli, qui æqualibus *reſpective* lateribus continentur, ipſiſque opponuntur; ac proinde niſi illi quoque ſint inter ſe æquales (§. 163.). Quamobrem

Co-

COROLLARIUM II.

194. *Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, habuerint autem etiam basim basi æqualem, angulum quoque habebunt angulo æqualem, qui æqualibus respective lateribus continentur.*

THEOREMA VII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, necnon angulum angulo æqualem, qui æqualibus respective lateribus continentur, & basim basi æqualem habebunt.

195. Latus AB trianguli BAC (*fig.* 17. *Tab.* I.) sit æquale lateri *ab* trianguli *bac* (*fig.* 18.), & latus AC lateri *ac*, necnon angulus BAC angulo *bac*. Dico, basim quoque BC basi *bc* esse æqualem.

Demonstratio.

Etenim stante hypothesi, duo hujusmodi triangula sic se habent, ut, uno alteri superposito, sibi mutuo congruant tum penes angulos BAC, *bac* tum penes latera AB, *ab*, & AC, *ac*. Ergo sibi mutuo congruent etiam eorum bases BC, *bc*; atque adeo istæ erunt inter se æquales (§. 163.).

COROLLARIUM.

196. *Duo itaque hujusmodi triangula sunt inter se mutuo æquilatera; adeoque etiam inter se mutuo æquiangula* (§. 193.), *nec non plane inter se æqualia* (§. 165.).

THEO-

THEOREMA VIII.

In triangulo isoscele recta ducta ab angulo verticali ad basim, eamque bifariam dividens, ipsum quoque angulum dividit bifariam, estque basi perpendicularis.

In triangulo isoscele BAC (*fig* 12. *Tab. I.*) ab angulo verticali BAC ad basim BC ducatur recta A*a*, quæ basim ipsam BC bifariam dividat.

I.

197. Dico primo, rectam A*a* dividere bifariam etiam angulum BAC.

Demonstratio.

Duo triangula BA*a*, CA*a* habent ex hypothesi duo latera AB, AC æqualia (§. 167.), latus A*a* est utrique commune, & basis B*a* basim C*a* adæquat. Ergo etiam angulus BA*a* æqualis est angulo CA*a* (§. 194.) ; adeoque &c.

II.

198. Dico 2., rectam A*a* ad perpendiculum basi BC incumbere.

Demonstratio.

Cum enim ex hypothesi latus B*a* adæquet latus *a*C, & latus A*a* sit commune utrique triangulo A*a*B, A*a*C, basis quoque AB sit æqualis basi AC (§. 167.), angulus A*a*B æqualis erit angulo A*a*C (§. 194.). Duo autem hujusmodi anguli valent duos rectos (§. 127.). Ergo uterque est rectus ; adeoque recta A*a* ad perpendiculum basi BC incumbit (§. 123.).

THEO-

THEOREMA IX.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quæ æqualibus angulis adjacent, vel quæ uni æqualium angulorum subtenduntur, & reliqua latera reliquis lateribus, alterum alteri, æqualia habebunt.

I.

199. Angulus ABC trianguli BAC (*fig* 17. *Tab.* I.) sit æqualis angulo *abc* trianguli *bac* (*fig.* 18.), & angulus ACB angulo *acb*. Æqualia quoque sint latera BC, *bc*, quæ æqualibus illis angulis adjacent. Dico, etiam latus AB esse æquale lateri *ab*, & latus AC lateri *ac*.

Demonstratio.

Cum enim stante hydothesi, nequeat triangulum BAC superponi triangulo *bac*, quin congruant sibi mutuo tum latera BC, *bc*, tum anguli ABC, *abc*, & ACB, *acb*, sibi mutuo quoque congruent tam latera AB, *ab*, quam latera AC, *ac*. Ergo tam illa, quam ista erunt inter se æqualia (§. 163.)

I I.

200. Æqualia modo sint latera AB, *ab*, quæ æqualibus angulis BCA, *bca* subtenduntur. Dico, æqualia esse inter se tum latera BC, *bc*, tum latera CA, *ca*.

Demonstratio.

Cum enim tres anguli trianguli ABC æquales sint tribus angulis trianguli *abc* (§ 178.) demtis æqualibus ABC, *abc*, & ACB, *acb*, erit reliquus BAC reliquo *bac* æqualis (§. 27.). Itaque latera AB, *ab* æqualibus angulis adjacent. Ergo latus

tus BC adequat latus *bc*, & latus AC latus *ac* (§. 199.); ac proinde &c.

COROLLARIUM.

201. *Duo igitur hujusmodi triangula, utpote inter se mutuo æquilatera sunt etiam inter se mutuo æquiangula* (§. 193.), *& inter se æqualia* (§. 165.).

THEOREMA X.

Si duo latera unius trianguli æqualia fuerint duobus lateribus alterius trianguli, alterum alteri; angulus vero unius major angulo alterius, qui æqualibus respective lateribus continentur, erit & basis major base; & vicissim, si, posita respectiva æqualitate laterum, fuerit basis major base, etiam angulus verticalis unius major erit angulo verticali alterius.

I.

202. Æqualia sint latera *ab*, AB, necnon *ac*, AC triangulorum *bac*, BAC (*fig.* 18. 19. *Tab.* I.), angulus vero BAC major sit angulo *bac*. Dico, etiam basim BC majorem esse base *bc*.

Demonstratio.

Etenim, stante illa *respectiva* æqualitate laterum, & inæqualitate angulorum verticalium, magis distracta erunt latera AB, AC, quam latera *ab*, *ac*. Ergo major quoque erit basis BC, quam basis *bc*.

II.

203. Vicissim vero, posita eadem *respectiva* æqualitate laterum, basis BC excedat basim *bc*. Dico, angulum quoque BAC majorem esse angulo *bac*.

Demonstratio.

Siquidem ob hypothesim distracta magis sunt latera BA, CA, quam latera *ba*, *ca*; adeoque &c.

CAPUT II.

De quadrilateris, parallelogrammis, & polygonis.

DEFINITIO I.

204. *Quadrilaterum planum rectilineum est figura plana quatuor rectis lineis terminata, totidemque angulos continens.* Dividitur autem *quadrilaterum* in *quadratum*, *altera parte longius*, *rombum*, *romboidem*, *&* *trapezium*.

DEFINITIO II.

205. *Quadratum est quadrilaterum, cujus omnia latera æqualia sunt inter se, sicuti etiam omnes ipsius anguli.* Ut quadrilaterum ABCD (*fig.* 21. *Tab.* I.).

COROLLARIUM.

206. *Quadratum igitur est figura regularis* (§. 161.).

DEFINITIO III.

207. *Altera parte longius est quadrilaterum, cujus omnes anguli æquales sunt inter se, ex lateribus vero, nonnisi quæ sibi mutuo opponuntur, sunt æqualia.* Tale est quadrilaterum ABCD (*fig.* 22. *Tab.* I.).

DEFINITIO IV.

208. *Rombus est quadrilaterum, cujus omnia latera sunt æqualia,*

lia; minime vero anguli. Romboides vero est quadrilaterum, cujus opposita tantum latera sunt æqualia, sed anguli sunt inæquales, qui ad eandem sunt partem. Sic quadrilaterum ABCD (*fig* 23. *Tab. I.*) est *rombus; romboides* vero quadrilaterum *abcd* (*fig.* 24.)

DEFINITIO V.

209. *Trapezium vero illud omne quadrilaterum nuncupatur, cujus duo opposita latera sunt inæqualia.*

DEFINITIO VI.

210. *Perallelogrammum est quadrilaterum, cujus duo quævis latera ex adverso posita sunt parallela.* Sic quadrilaterum ACDB (*fig* 20. *Tab.* I.) erit parallelogrammum, si tam duo latera AB, CD, quam duo AC, BD, fuerint parallela. Quod si illius anguli fuerint recti, *rectangulum* dicitur, ut ABCD (*fig.* 22.)

DEFINITIO VII.

211. *Diameter*, sive *diagonalis parallelogrammi est recta ducta ad oppasitos parallelogrammi angulos.* Si recta AD est *diameter*, sive *diagonalis* parallelogrammi ACDB (*fig.* 20. *T.* I.)

DEFINITIO VIII.

212. *Polygonum est figura plana pluribus, quam quatuor rectis lineis terminata.* Hinc innumeræ prorsus sunt *polygoni* species, cum illius latera in infinitum multiplicari queant. Quod igitur quinque constat lateribus, *pentagonum; hexagonum*, quod sex; *heptagonum*, quod septem lateribus, atque ita de ceteris, comprehenditur.

AXIOMA.

213. *Quadrata æqualia habent latera æqualia*; & vicissim *quadrata rectarum æqualium sunt æqualia.*

THEOREMA I.

Quatuor anguli cujuslibet quadrilateri simul sumti conficiunt summam quatuor rectorum.

214. Nimirum quatuor anguli quadrilateri ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.) summam quatuor rectorum conficiunt.

Demonstratio.

Nam ducta ad oppositos angulos recta AD, quatuor anguli quadrilateri ACDB adæquant sex angulos triangulorum DAB, ADC (§. 22.). Sex autem anguli triangulorum DAB, ADC simul sumti valent quatuor rectos (§. 172.). Ergo totidem quoque rectos quatuor anguli quadrilateri ACDB æquabunt (§. 25.).

COROLLARIUM.

215. *Omnes anguli quadrati, sicuti etiam quadrilateri, quod est altera parte longius, sunt recti.* Sunt enim omnes inter se æquales (§. 205. 207.); cumque omnes anguli recti sint inter se æquales (§. 126.), *omnia quadrata, sicuti etiam omnia quadrilatera altera parte longiora, sunt respective inter se mutuo æquiangula* (§. 160.).

THEOREMA II.

Omne quadrilaterum, cujus duo opposita latera sunt æqualia, & parallela, est parallelogrammum.

216. Duo latera AB, CD quadrilateri ACDB (*fig.* 20 *Tab.* I.) sint æqualia inter se, & parallela. Dico, quadri laterum ACDB esse parallelogrammum.

Demonstratio.

Ducta ad oppositos angulos A, D recta AD, cum rectæ AB,

AB, CD sint parallelæ, anguli alterni DAB, ADC erunt æquales (§. 151.). Duo autem latera AB, CD posita sunt æqualia, & latus AD est commune utrique triangulo DAB, ADC. Ergo bases BD, AC erunt æquales (§. 195.); duoque ipsa triangula erunt inter se mutuo æquilatera; ac proinde inter se mutuo æquiangula, nimirum anguli ADB, DAC erunt æquales (§. 193.). Sunt autem alterni. Ergo rectæ AC, BD sunt parallelæ (§. 147.); & ideo quadrilaterum ACDB est parallelogrammum (§. 210.).

COROLLARIUM.

217. *Rectæ, quæ ad eandem partem conjungunt duas rectas æquales, & parallelas, sunt inter se æquales, & parallelæ.* Demonstravimus enim, rectas AC, BD, quæ ad easdem partes simul jungunt rectas æquales, & parallelas, AB, CD, esse inter se æquales, & parallelas.

THEOREMA III.

Omne quadrilaterum habens opposita latera æqualia, vel oppositos angulos æquales, est parallelogrammum.

I.

218. Tam duo latera AB, CD; quam duo AC, BD quadrilateri ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.) sint æqualia. Dico, quadrilaterum ACDB esse parallelogrammum.

Demonstratio.

Ducta ad oppositos angulos recta AD, duo triangula DAB, ADC sunt propter hypothesim inter se mutuo æquilatera. Ergo & æquiangula (§. 193.), æquales nimirum sunt tum anguli DAB, ADC, tum anguli ADB, DAC. Ergo, cum sint alterni, tam rectæ AB, CD, quam rectæ BD, AC sunt parallelæ (§. 147.); adeoque &c.

I I.

219. Sint modo duo anguli ACD, ABD æquales inter ſe, ſicuti etiam duo BAC, CDB. Dico, quadrilaterum ACDB eſſe parallelogrammum.

Demonſtratio.

Cum enim, ſtante hypotheſi, duo BAC, ACD æquales ſint duobus ABD, BDC; duo DBA, BAC duobus ACD, CDB; & omnes illi quatuor anguli valeant quatuor rectos (§. 214.), tam duo BAC, ACD, quam duo DBA, BAC, erunt duobus rectis æquales. Ergo parallelæ erunt inter ſe tam rectæ AB, CD, quam rectæ AC, BD (§. 144.); ac proinde quadrilaterum ACDB erit parallelogrammum (§. 210).

COROLLARIUM.

220. *Quadratum, altera parte longius, rombus, & romboides ſunt parallelogramma.* Habent enim oppoſita latera æqualia (§§. 205. 208. 227.).

THEOREMA IV.

Omnis parallelogrammi, qui ex adverſo ſunt, anguli & latera ſunt inter ſe æqualia.

I.

221. Eſto parallelogrammum ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.). Dico 1, oppoſitos ipſius angulos ABD, ACD eſſe æquales.

Demonſtratio.

Cum enim ob paralleliſmum rectarum AC, BD duo anguli

guli DBA, BAC valent duos rectos (§. 148.), ſicuti haud diſſimili ratione etiam duo BAC, ACD, quod ſcilicet etiam rectæ AB, CD ſint parallelæ (§. 210.), duo anguli DBA, BAC æquabunt duos BAC, ACD (§. 24.). Sublato ergo communi BAC, erit reliquus DBA reliquo ACD æqualis (§. 27.). Eodem modo oſtendentur æquales etiam duo BAC, CDB.

II.

222. Dico 2, oppoſita latera AB, CD, ſicuti etiam AC, BD, eſſe æqualia.

Demonſtratio.

Etenim, ducta diagonali AD, cum anguli alterni BAD, ADC, ADB, DAC ſint æquales (§. 51.) ipſiſque adjaceat latus AD, quod eſt commune utrique triangulo DBA, ACD, erit AB=CD, AC=BD (§. 199.).

COROLLARIUM I.

223. *Si unus angulorum parallelogrammi rectus fuerit, etiam reliqui ipſius anguli erunt recti.* Non enim poteſt unus ABC (*fig.* 22. *Tab.* I.) eſſe rectus, quin rectus ſit etiam oppoſitus ADC; cumque tunc reliqui duo BAD, BCD valeant duos rectos (§. 214.) & ſint æquales, ipſi quoque erunt recti.

COROLLARIUM II.

224. *Segmenta rectarum parallelarum inter parallelas contenta ſunt æqualia.* Nimirum æqualia inter ſe erunt ſegmenta *ab*, *ef* rectarum parallelarum *am*, *en* (*fig.* 9. *Tab.* I.) contententa inter parallelas AB, CD. Quadrilaterum quippe *abfe* eſt parallelogrammum (§. 210.).

COROLLARIUM III.

225. *Omnes rectæ in parallelogrammo basi parallelæ, sunt inter se æquales.* Ut si in parallelogrammo ABCD (*fig.* 22. *T.* I.) ductæ intelligantur rectæ *ab*, *cd*, & aliæ quotcunque basi BC parallelæ, istæ erunt omnes inter se æquales. Cum enim ob hypothesim quadrilatera *a*BC*b*, *c*BC*d* sint parallelogramma, æqualia erunt opposita latera *ab*, BC*cd*, BC; adeoque &c.

THEOREMA V.

Diagonales parallelogrammi sese mutuo bifariam dividunt, & omnis diagonalis dividit parallelogrammum in duo æqualia triangula.

I.

226. In parallelogrammo ABCD (*fig.* 23. *Tab.* I.) ductæ sint diagonales AC, BD. Dico, eas sese mutuo bifariam dividere.

Demonstratio.

Æquales sunt anguli alterni BDC, DBA & ACD, CAB (§. 51.). Æqualia sunt autem etiam latera AB, CD triangulorum A*a*B, D*a*C, quæ illis adiacent (§. 222.). Ergo erit quoque B*a*=*a*D, A*a*=*a*C (§. 199.).

II.

227. In parallelogrammo ACDB (*fig.* 20. T. I.) esto diagonalis AD. Dico, triangula DAB, ADC esse æqualia; adeoque parallelogrammum ACDB duplum esse utriusque trianguli DAB, ADC.

Demonstratio.

Cum enim sit AB=CD, AC=BD (§. 222.) & latus AD sit com-

commune utrique triangulo DAB, ADC, hujusmodi triangula sunt inter se mutuo æquilatera; ac proinde inter se æqualia (§. 192.).

COROLLARIUM.

228. Opposita triangula A*a*D B*a*C A*a*B, D*a*C, (*fig.* 23. *Tab.*I.) in quæ parallelogrammum ABCD dividitur a diagonalibus AC, BD sunt æqualia. Quippe, cum triangulum ACD sit æquale triangulo DBA (§. 227.) sublato communi A*a*D, erit reliquum A*a*B reliquo D*a*C æquale (§. 27.). Eodem modo triangulum A*a*D triangulo B*a*C æquale demonstrabitur.

THEOREMA VI.

Parallelogramma super eandem basim, & in iisdem rectis parallelis constituta, sunt æqualia.

229. Super eandem basim BC, & in iisdem rectis parallelis AF, BC (*fig.*25. *Tab* I.) constituta habeantur duo parallelogramma ABCD, EBCF. Dico, ea esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Cum enim sit AD=BC, & EF=BC (§. 222.), erit quoque AD=EF(§.24.); adeoque AE=DF (§. 26.) Est autem etiam AB=DC, & BE=CF (§. 222.) Ergo duo triangula AEB, DFC, utpote inter se mutuo æquilatera, sunt inter se æqualia (§. 192.). Sublato propterea communi triangulo D*a*E, erit trapezium AB*a*D trapezio E*a*CF æquale (§. 27.), utrisque vero addito triangulo B*a*C, erit totum ABCD æquale toti EBCF (§.26.); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

230. *Triangula super eandem basim, & in iisdem rectis parallelis constituta sunt æqualia.* Videlicet æqualia erunt triangula BAC,

BAC, BFC super eadem basim BC, & in iisdem rectis parallelis AF, BC constituta. Sunt enim pars dimidia parallelogrammorum æqualium ABCD, EBCF (§. 227.).

COROLLARIUM II.

231. *Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerunt basim, & fuerint in iisdem rectis parallelis constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.* Sic parallelogrammum ABCD est duplum trianguli BFC Cum enim parallelogrammum ABCD sit duplum trianguli BAC (§. 227.), & triangulum BFC sit æquale triangulo BAC (§ 230.), parallelogrammum ABCD duplum quoque erit trianguli BFC (§. 70).

THEOREMA VII.

Quadratum hypotenusæ trianguli rectanguli est æquale quadratis laterum simul sumtis.

232. Super latera trianguli rectanguli ABC (*fig.* 26. *T.* I.) descripta intelligantur quadrata AN, BD, BE. Dico, quadratum AN hypotenusæ AC æquare quadrata BD, BE laterum AB, BC simul sumta.

Demonstratio.

Jungantur puncta D, C recta DC, & puncta B, F recta BF, ductaque intelligatur a vertice B recta BM parallela lateri AF. Itaque, cum anguli DAB, CAF, utpote recti, sint æquales (§. 116.), addito utriusque angulo BAC, totus DAC toti BAF erit æqualis (§. 26.). Æqualia sunt autem etiam latera DA, AB, sicuti etiam AC, AF (§. 205.). Ergo triangulum DCA erit æquale triangulo ABF (§. 196.). Quadratum autem BD, & triangulum DCA habent eandem basim DA, & sunt in iisdem rectis parallelis PC, DA constituta; cum recta BC, & recta PB ob rectitudinem angulorum ABP, ABC sint in directum positæ (§. 132.), rectaque PB sit parallela rectæ DA (§. 220.).

(§. 220.). Ergo quadratum BD est duplum trianguli DCA (§. 231.). Eadem porro ratione parallelogrammum AFM*a* est duplum trianguli ABF. Ergo quadratum DB, & parallelogrammum AFM*a* sunt æqualia (§. 70.) Haud dissimili modo ostendam, parallelogrammum *a*MNC æquare quadratum BE. Igitur duo parallelogramma AM, *a*N, sive quadratum AN adæquat duo quadrata BD, BE simul sumta; ac proinde &c.

COROLLARIUM.

233. *Quadratum diagonalis quadrati est duplum quadrati lateris ejusdem*. Videlicet quadratum diagonalis BD quadrati ABCD (*fig.* 21. *Tab.* I.) est duplum quadrati lateris BA. Quadratum quippe diagonalis BD est æquale quadratis laterum BA, AD ob rectitudinem anguli BAD; ipsa vero quadrata sunt inter se æqualia (§. 213).

SCHOLION.

234. Ex hoc *corollario* ostenditur, dari lineas *incommensurabiles*, hoc est hujusmodi, ut nulla sit pars quantumvis exigua, quæ eas omnes adæquate metiatur. Observandum est igitur, unam partem *aliquotam* lineæ se habere ad totam ipsam lineam, quemadmodum *unitas* ad numerum integrum, videlicet unam partem *vigesimam* lineæ esse ad lineam integram, ut 1 ad 20; atque hinc quadratum quoque lineæ cujuscunque esse ad ipsam lineam, ut est numerus quadratus ad suam radicem; & ideo quadratum cujuslibet lineæ numeris exprimi posse, nempe quadratum lineæ, quæ spectetur divisa in 6. partes æquales, posse exprimi numero quadrato 36., sicuti ipsa linea numero 6. designatur. Nequeunt ergo duæ lineæ habere partem *aliquotam* communem, quin duobus integris numeris ex eadem unitate aliquoties sumta resultantibus exprimi illæ queant; ac proinde quin etiam illarum quadrata duobus numeris quadratis designentur, ita nimirum ut, si, posita divisione lineæ A in *sex* partes

tes æquales, quatuor ex his partibus adæquate constituant lineam B, quadratum lineæ A optime exprimatur numero quadrato 36, & quadratum lineæ B numero quadrato 16; sitque propterea quadratum lineæ A ad quadratum lineæ B, ut 36, ad 16, sicuti linea A est ad lineam B, ut 6. ad 4. His positis, evidens est ex hoc *corollario*, diagonalem DB quadrati ABCD (*fig.* 21. *Tab.* I.) esse *incommensurabilem* lateri AB ipsius quadrati. Hujusmodi enim rectæ nequeunt esse *commensurabiles*, seu duobus integris numeris designari, quin duobus numeris quadratis earum itidem quadrata exprimantur. Hoc autem aperte falsum est; cum certa res sit, duos numeros quadratos inveniri neutiquam posse, quorum unus sit duplus alterius, quemadmodum quadratum diagonalis BD est in ratione *dupla* ad quadratum lateris AB. Ergo duæ rectæ BD, AB nullam habent communem mensuram, seu sunt inter se *incommensurabiles*; atque adeo ex *indivisilibus* haudquaquam coalescunt. Nam, cum ejusmodi indivisibilia, si admittantur, sint æqualia inter se, illorum quodlibet utramque rectam BD, AB adæquate metiretur, quod repugnat. Omnis itaque linea ex partibus in infinitum divisibilibus componatur necesse est.

THEOREMA VIII.

Anguli interni cujuslibet polygoni simul sumti conficiunt summam tot rectorum, quot sunt ipsius latera bis sumta, demtis quatuor.

235. Videlicet, cum numerus laterum hexagoni ACE (*fig.* 27. *Tab.* I.) bis sumtus, sit 12, sique huic numero quatuor unitates demantur, relinquatur 8, omnes anguli ipsius hexagoni simul sumti æquabunt 8 angulos rectos.

Demonstratio.

Sumto in area hexagoni puncto *a*, ducantur ad singulos ipsius angulos rectæ *a*A, *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, *a*F. Divisum itaque illud erit in tot triangula, quot sunt ipsius latera, cum-

cumque tres anguli cujuslibet trianguli adæquent duos rectos (§. 172.), omnes anguli hexagoni ACE una cum iis, qui sunt circa punctum *a*, erunt æquales 12. angulis rectis. Anguli autem, qui sunt circa punctum *a* valent quatuor rectos (§. 130.). Ergo anguli hexagoni ACE simul sumti *octo rectos* æquabunt: Eodem modo ratiocinare de aliis. Itaque &c.

COROLLARIUM I.

236. Cum in quolibet polygono tot sint anguli, quot latera, omnesque anguli polygoni regularis sint inter se æquales (§. 161.), diviso numero angulorum rectorum, quos adæquant anguli polygoni regularis, per numerum laterum ejusdem, *quotus* erit valor cujuslibet anguli ipsius polygoni dati. Sic quilibet angulus hexagoni regularis adæquat $\frac{8}{6}$ sive $\frac{4}{3}$ unius recti, nempe ***unum rectum, & unam tertiam*** illius partem. Hinc

COROLLARIUM II.

237. Ex omnibus figuris rectilineis regularibus sola triangula, quadrata, & hexagona, si penes latera *respective* simul uniantur, replent spatium, quod est circa idem punctum in eodem plano. Videlicet *sex triangula, & quatuor quadrata, & tria hexagona regularia* simul penes latera unita spatium complent exacte, quod est circa datum punctum in plano, & præter has figuras nulla est alia, cui id competat. *Sex* enim anguli *trianguli regularis* (§. 175.) *quatuor* anguli *quadrati* (§. 215.) sicuti etiam *tres* anguli *hexagoni regularis* (§. 236.) simul sumti, æquales sunt quatuor rectis.

COROLLARIUM III.

238. *Omnes figuræ rectilineæ regulares ejusdem generis sunt inter se mutuo æquiangulæ.*

CA-

CAPUT III.

De circulo.

DEFINITIO I.

239. *Circulus est figura plana una tantum curva linea comprehensa, in cujus area punctum est, a quo omnes rectæ ductæ in illam curvam sunt æquales.* Hujusmodi est figura ABD (*fig.* 28. *Tab.*I.). Curva quippe continetur linea AEDB, omnesque rectæ *a*A, *a*E, *a*D &c. ductæ a puncto *a* in illam curvam, sunt inter se æquales.

DEFINITIO II.

240. *Peripheria, sive circumferentia circuli est curva linea, qua ille clauditur. Centrum est punctum sumtum in illius area, a quo omnes rectæ ductæ in peripheriam sunt æquales. Radius,* qui etiam *semidiameter* dicitur, *est qualibet recta ducta a centro in peripheriam. Diameter vero est quævis recta ducta per centrum, & utrinque ad peripheriam terminata.* Sic curva ADB (*fig.*27.*Tab.*I.) est *peripheria* circuli AEB. *Centrum* est punctum *a*. *Radius*, sive *semidiameter* recta quævis *a*A, *a*B &c. *Diameter* vero recta AC.

COROLLARIUM.

241. *Omnes radii circuli, sicuti etiam omnes ipsius diametri, sunt respective inter se æquales.* Cumque centrum circuli sit punctum in illius medio positum, *quævis diameter bifariam circulum dividit.* Unde portio circuli diametro & semiperipheria terminata, *semicirculus*; portio vero quarta peripheriæ parte, & duobus radiis angulum rectum in centro constituentibus comprehensa, ut A*a*B (*fig.* 28. *Tab.* I.) *quadrans* circuli nuncupatur.

DE-

DEFINITIO III.

242. *Chorda circuli est quævis recta ducta intra circulum; & utrinque ad illius peripheriam terminata*, ut recta *bd*. *Portiones vero circuli, quæ chorda definiuntur*, ut *bd*B, *b*E*d* (*fig.* 28. *Tab.* I.) *circuli segmenta vocari solent*.

DEFINITIO IV.

243. *Sector circuli est illius portio sub duobus radiis, & arcu, quem illi intercipiunt, comprehensa*. Hujusmodi sunt portiones A*a*E, E*a*D circuli ADB (*fig.* 28. *Tab.* I.).

DEFINITIO V.

244. *Angulus ad centrum*, sive *in centro circuli, dicitur ille, qui a duobus ipsius circuli radii in ipso centro efficitur*, ut angulus E*a*D. *Angulus vero ad peripheriam vocatur ille, cujus apex in peripheria est, ejusque crura in peripheriam desinunt*, ut angulus EBD (*fig.* 29. *Tab.* I.) in circulo EBD. Uterque porro istorum arcui ED insistere dicitur.

SCHOLION.

245. *Mensura anguli positi in centro circuli est arcus peripheriæ ipsius circuli, inter anguli crura comprehensus*. Sic arcus ED (*fig* 29. *Tab.* I.) metitur angulum E*a*D positum in centro *a* circuli BED. Universaliter autem *mensura anguli rectilinei est arcus circuli, arbitrario circini intervallo ex illius apice descripti, contentus inter crura ipsius anguli*. Ut si ex apice *a* anguli E*a*D describatur circulus BED, arcus ED, qui continetur inter crura *a*E, *a*D ipsius anguli, ejusdem mensura nuncupatur. Quoniam porro peripheria cujusvis circuli dividitur a Mathematicis in 360. partes æquales, quas *gradus* vocant, & quilibet *gradus* in 60. partes itidem æqua-

quales, quæ dicuntur *minuta*, atque ita deinceps, *tot graduum & minutorum dicitur datus quivis angulus, quot gradus & minuta in illo numerantur arcu, qui angulum ipsum metitur.* Ut si in arcu ED sint *gradus* 23, & *minuta* 40, angulus E*a*D erit *grad.* 23, & *min.* 40. Ex his manifeste sequitur.

COROLLARIUM I.

246. *Angulos positos in centro ejusdem circuli esse directe inter se, ut arcus, quos eorum crura comprehendunt*; & vicissim *arcus esse, ut ipsi anguli*. Sic angulus A*a*E (*fig.* 28. *Tab.* I.) est ad angulum E*a*D, ut arcus AE ad arcum ED, & vicissim arcus AE ad arcum ED, ut angulus A*a*E ad angulum E*a*D.

COROLLARIUM II.

247. Quoniam vero tota peripheria circuli est mensura quatuor angulorum rectorum, qui circa illius centrum esse possunt (§. 130.) perspicuum efficitur, *ut angulus in centro circuli ad quatuor rectos, ita esse arcum illi subtensum ad totam peripheriam*; & vicissim, *ut est arcus circuli ad totam peripheriam, ita esse angulum in centro circuli, qui illi arcui insistit, ad quatuor rectos*. Nimirum ut angulus E*a*D (*fig.* 28. *Tab.* I.) ad quatuor rectos, ita esse arcum ED ad totam peripheriam circuli BED, & vissim, ut arcus ED ad totam peripheriam BED, ita esse angulum E*a*D, ad quatuor rectos, qui circa centrum *a* in plano circuli constitui possunt.

DEFINITIO VI.

248. *Angulus in circuli portione consistens vocatur ille, qui efficitur a duabus rectis lineis ductis a puncto sumto in arcu ipsius portionis ad ejusdem extrema*. Sic angulus EBD (*fig.* 29. *Tab.* I.) sicuti etiam angulus EAD, dicitur consistere in portione EBAD circuli EDB.

DEFINITIO VII.

249. *Angulus segmenti est ille, qui a recta circulum tangente, & chorda per punctum contactus ducta efficitur.* Talis est angulus DAB (*fig.* 30. *Tab.* I.) sicuti etiam CAB, qui fiunt a recta tangente CD, & a chorda AB ducta per punctum contactus A. Angulus porro DAB dicitur *angulus segmenti minoris* A*a*B; *majoris* vero *segmenti* A*d*B *angulus* CAB. Segmentum quoque A*d*B vocatur *alternum*, si ad angulum DAB referatur, sicuti etiam segmentum A*a*B, si cum angulo CAB comparetur.

DEFINITIO VIII.

250. *Duæ rectæ lineæ in circulo dicuntur æqualiter distare ab illius centro cum æquales sunt rectæ perpendiculares, quæ ab ipso centro in illas cadunt.* Sic rectæ BC, DE in circulo BE (*fig.* 31. *Tab.* I.) æqualiter distabunt ab illius centro *a*, si rectæ perpendiculares *ab*, *ae* fuerint inter se æquales.

THEOREMA I.

Si radius circuli ad angulos rectos chordam secuerit, ipsam, ejusque arcum bifariam secabit: & vicissim radius circuli chordam bifariam secans, est ipsi chordæ perpendicularis.

I.

251. Radius DE circuli AEB (*fig.* 32. *Tab.* I.) secet ad angulos rectos chordam AB. Dico, illam bifariam dividere.

Demonstratio.

Ductis radiis DA, DB ad extrema chordæ AB, cum isti sint æquales inter se (§. 241.), anguli DAB, DBA erunt æquales (§. 187.). Æquales sunt autem per hypothesim

etiam duo DaA, DaB. Ergo itidem reliquus BDa reliquam ADa æquabit (§. 178.). Latus porro AD trianguli ADa adæquat latus DB trianguli BDa, & latus Da est commune utrique triangulo. Igitur etiam unius basis Aa basim aB alterius æquabit (§. 195.); adeoque &c.

II.

252. Dico, radium DE dividere bifariam etiam arcum AEB.

Demonstratio.

Cum enim anguli ADE, EDB, ut modo ostensum est, sint æquales, etiam arcus AE, EB erunt æquales (§. 246.).

III.

253. Vicissim vero radius DE bifariam dividat chordam AB. Dico, radium DE ad perpendiculum illi incumbere.

Demonstratio.

Cum enim ob æqualitatem radiorum DA, DB triangulum ADB sit isosceles (§. 167.), recta Da ad perpendiculum propter hypothesim illius basi AB insistet (§. 198.); adeoque &c.

THEOREMA II.

Si in circulo recta quædam linea aliam rectam bifariam & ad angulos rectos secuerit, erit in ipsa secante centrum circuli.

254. Recta DE in circulo AEB (*fig.* 32. *Tab.* I.) bifariam & ad angulos rectos dividat chordam AB. Dico, in recta DE esse centrum ipsius circuli.

De-

Demonstratio.

Si namque fieri potest, centrum circuli sit extra rectam DE, sitque illud punctum *b*. Ducatur autem a puncto *b* ad punctum sectionis *a* recta *ba*. Hæc erit rectæ AB perpendicularis (§. 253.). Eidem autem AB posita est perpendicularis etiam recta D*a*. Igitur utraque D*a*, *ba* in eodem plano ad idem punctum *a* eidem rectæ AB perpendiculariter incumbit. Hoc autem repugnat (§. 133.). Ergo punctum *b* non est centrum circuli AEB; & eadem ratione nullum extra rectam DE. Igitur &c.

THEOREMA III.

Recta ducta per extremum radii ad angulos rectos circulum tangit; & vicissim, si a centro circuli ad punctum, in quo circulus a recta tangitur, recta ducatur, erit ipsi tangenti perpendicularis.

I.

255. Per extremum punctum B radii FB (*fig.* 33. *Tab.* I.) ducatur recta DE ad angulos rectos. Dico, rectam DE tangere circulum in puncto B.

Demonstratio.

Ducta enim a centro F ad quodvis punctum C rectæ DE recta FC, cum recta FB, utpote perpendicularis, sit minima omnium rectarum, quæ a centro F in rectam DE cadere possunt (§. 185.), recta FB erit minor recta FC. Igitur punctum extremum C reperitur extra peripheriam circuli AB. Idipsum eodem modo de omnibus aliis punctis rectæ DE a puncto B diversis demonstrabitur. Recta ergo DE tangit ipsum circulum AB.

II.

256. Viciſſim vero recta DE tangat circulum AB in puncto B, ad quod a centro F ducatur recta FB. Dico, rectam FB rectæ DE ad perpendiculum incumbere.

Demonſtratio.

Cum enim cetera puncta rectæ DE cadant propter hypotheſim extra peripheriam circuli AB, quævis recta diverſa a recta FB, ducta a centro F ad rectam DE, ut recta FC, major erit ipſa FB. Ergo nulla harum rectarum poteſt rectæ DE ad perpendiculum incumbere, cum ſcilicet perpendicularis ſit omnium minima (§. 185.). Recta igitur FB perpendicularis eſt rectæ DE; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

257. *Recta non tangit circulum niſi in puncto.* Etenim, ſi ſecus, duæ perpendiculares ex eodem puncto ad eandem rectam duci poſſent (§. 256.) quod repugnat (§. 174).

COROLLARIUM II.

258. *Si a centro circuli ad rectam tangentem perpendicularis ducatur, hæc cadet in punctum contactus.* Non enim cadere poteſt extra, quin duæ rectæ perpendiculares ex ipſo centro in eandem rectam tangentem duci queant; cum ſcilicet etiam recta ducta a centro circuli ad punctum contactus, ſit tangenti perpendicularis (§. 256.);

THEO-

THEOREMA IV.

Si recta circulum tangat, atque a puncto contactus recta intra circulum excitetur, quæ tangenti ad perpendiculum incumbat, erit in illa centrum circuli.

259. Recta DE tangat circulum AB in puncto B (*fig.* 33. *Tab.* I.) a quo intra circulum excitetur recta perpendicularis BF. Dico, in recta FB esse centrum ipsius circuli.

Demonstratio.

Si enim fieri potest, centrum circuli AB sit punctum *a* extra rectam FB. Igitur recta *a*B erit tangenti DE perpendicularis (§. 256.). Hoc autem repugnat (§. 174); cum eidem DE posita sit perpendicularis etiam recta FB. Ergo &c.

THEOREMA V.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; & vicissim, quæ æqualiter a centro distant, sunt æquales.

I.

260. In circulo BDC (*fig.* 31. *Tab.* I.) sint rectæ æquales BC, DE. Dico, eas distare æqualiter a centro *a*, videlicet perpendicula *ab*, *ae* esse æqualia.

Demonstratio.

Ductis radiis *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, cum isti sint æquales (§. 241), sicuti etiam rectæ BC, DE ex hypothesi, duo triangula B*a*C, D*a*E erunt inter se mutuo æquilatera, ac proinde etiam æquiangula (§. 193), angulus nempe BC*a* erit æqualis angulo DE*a*. Est autem latus *b*C trianguli *b*C*a* æquale lateri eE trianguli *e*E*a* (§. 251), sicuti etiam latus *a*C

lateri *a*E (§. 251.). Ergo etiam bases, sive perpendicula *ab*, *ae* erunt æqualia (§. 195.).

II.

261. Vicissim vero rectæ BC, DE æqualiter distent a centro *a*, perpendicula nimirum *ab*, *ae* sint æqualia. Dico, etiam ipsas rectas BC, DE esse æquales.

Demonstratio.

Ductis radiis *a*C, *a*E, cum ob hypothesim perpendiculorum *ab*, *ae*, duo triangula *ab*C, *ae*E sint rectangula, quadratum radii *a*C erit æquale quadratis laterum *ab*, *b*C, & quadratum radii *a*E quadratis laterum *ae*, *e*E (§. 232.). Quadrata autem radiorum *a*C, *a*E sunt æqualia (§. 213.). Ergo duo itidem quadrata laterum *ab*, *b*C æqualia erunt quadratis laterum *ae*, *e*E (§. 24.). Quocirca, sublatis quadratis æqualibus æqualium perpendiculorum *ab*, *ae*, quadratum lateris *b*C æquabit quadratum lateris *e*E (§. 27.). Igitur ipsa quoque latera *b*C, *e*E sunt æqualia (§. 213); cumque sit BC = 2*b*C, & DE = 2*e*E (251.), erit etiam BC = DE (§. 94.); ac proinde &c.

THEOREMA VI.

Recta in circulo, quæ per centrum transit, est omnium maxima. Aliarum vero, quæ propinquior est centro, remotiore major est.

In circulo EGF (*fig.* 1. *Tab.* II.) sint plures rectæ lineæ AB, CD, EF, quarum AB per centrum *a* ipsius circuli transeat.

I.

262. Dico primo, rectam AB esse omnium maximam.

De-

Demonstratio.

Ductis radiis *a*C, *a*D, cum recta AB sit æqualis duobus radiis *a*C, *a*D, sicuti duo radii *a*C, *a*D simul sumti majores sunt recta CD (§. 181.), ita recta AB major erit ipsâ CD (§. 70.), eademque ratione recta AB ceteras omnes extra centrum *a* ductas magnitudine superabit.

II.

263. Dico 2, rectam CD proximiorem centro *a* majorem esse remotiore EF.

Demonstratio.

Ducantur radii *a*E, *a*F. Itaque, cum duo *a*C, *a*D æquales sint duobus *a*E, *a*F (§. 241.); & angulus C*a*D major sit angulo E*a*F (§. 23.), perspicuum remanet, basim quoque, sive rectam CD, majorem esse base, sive recta EF (§. 202.). Igitur &c.

COROLLARIUM.

264. *Diameter ergo circuli est omnium rectarum, quæ in ipso circulo duci possunt, maxima;* & vicissim *maxima rectarum, quæ in circulo duci queunt, per illius centrum transit, adeoque illius est diameter.*

THEOREMA VII.

In eodem circulo angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, si uterque eidem arcui insistat.

265. Quoniam tribus modis se habere possunt in circulo angulus ad centrum, & angulus ad peripheriam, eidem arcui insistentes, tres casus distinguendi sunt, ut theorema plane ostendatur.

Primus Caſus.

Eſto angulus E*e*D (*fig.* 29. *Tab.* I.) ad centrum *e* in circulo EBD, & angulus EBD ad peripheriam, eidem inſiſtentes arcui E*a*D. Dico, angulum E*e*D duplum eſſe anguli EBD.

Demonſtratio.

Ex apice B per centrum *e* ducta recta B*a*, cum duo anguli DB*e*, *e*DB trianguli B*e*D ob æqualitatem laterum *e*B, *e*D (§. 241.) ſint æquales (§. 187.), & angulus *ae*D adæquet duos ipſos DB*e*, *e*DB ſimul ſumtos (§. 180.), angulus *ae*D erit duplus Anguli *e*BD. Eſt autem eadem ratione etiam angulus E*ea* duplus anguli EB*e*. Ergo totus E*e*D duplus erit totius EBD (§. 101.).

Secundus Caſus.

Angulus ad centrum ſit E*e*D, & A*e*D, & EAD angulus ad peripheriam. Dico, angulum E*e*D eſſe duplum anguli EAD.

Demonſtratio.

Patet ex precedenti. Eodem enim modo, quo oſtenſum eſt, angulum *ae*D duplum eſſe anguli *e*BD, demonſtrabitur etiam, angulum E*e*D duplum eſſe anguli EAD.

Tertius Caſus.

Sit angulus B*a*C (*fig.* 2. *Tab.* II.) ad centrum, & angulus BDC ad peripheriam. Dico, angulum B*a*C duplum eſſe anguli BDC.

Demonſtratio.

Du[illegible]ce D per centrum *a* recta D*e*, patet ex *de-*

mon-

monstratione primi casus, angulum *ea*C esse duplum anguli *e*DC, & angulum *ea*B anguli *e*DB. Ergo etiam reliquus B*a*C duplus est reliqui BDC (§. 103.).

COROLLARIUM I.

266. *Omnes anguli qui in eadem circuli portione consistunt, sunt æquales*. Nimirum æquales sunt anguli EBD, EAD (*fig*. 29. *Tab*. I.) in eadem portione EBAD circuli EDB consistentes. Etenim eorum quilibet est medietas anguli E*e*D in centro positi.

COROLLARIUM II.

267. *Mensura anguli ad circuli peripheriam consistentis est mediatas arcus, cui insistit*. Sic mensura anguli BBD (*fig*. 29. *Tab*. I.) est pars dimidia arcus E*a*D, scilicet arcus E*a*. Totus enim arcus E*a*D metitur angulum E*e*D (§. 245.), qui est duplus anguli EBD. Hinc

COROLLARIUM III.

268. *Angulus in semicirculo consistens rectus est; qui in portione majori, minor; & qui in minori, major est recto*. Rectus nimirum est angulus AB*e* (*fig*. 30. *Tab*. I.) positus in semicirculo A*a*B*e*; acutus angulus *e*AB positus in portione *e*A*a*B majori semicirculo; obtusus vero angulus A*a*B, qui in portione A*a*B minori semicirculo reperitur. Cum enim tota peripheria circuli metiatur quatuor angulos rectos, qui circa centrum fieri possunt (§. 130.), quarta pars peripheriæ erit mensura anguli recti; arcus major quadrante erit mensura anguli obtusi, & arcus quadrante minor metietur angulum acutum. Mensura autem anguli AB*e* in semicirculo positi est pars dimidia semiperipheriæ A*de*, sive quadrans totius peripheriæ; mensura anguli *e*AB est pars dimidia arcus *e*B, adeoque arcus minor quadrante, &

men-

mensura Anguli A*a*B est pars dimidia arcus A*de*B, ac proinde arcus major quadrante. Ergo &c.

COROLLARIUM IV.

269. Quamobrem vicissim *portio circuli, quæ rectum angulum continet, semicirculus est; major semicirculo, quæ acutum; minor vero semicirculo, quæ obtusum angulum comprehendit*. Etenim, si secus neque angulus rectus in semicirculo, neque acutus in portione majori; neque obtusus in portione minori semicirculo contineretur.

COROLLARIUM V.

270. Sequitur postremo, *omnis quadrilateri in circulo positi duos angulos ex adverso simul sumtos æquare duos rectos.* Nimirum angulos A*a*B, A*e*B quadrilateri A*e*B*a* (*fig* 30 *T*. I.) consistentis in circulo A*d*B summam duorum rectorum conficere. Cum enim mensura anguli A*a*B sit pars dimidia arcus A*d*B, & mensura anguli A*e*B sit medietas arcus A*a*B (§. 267.), semiperipheria circuli A*d*B valorem definiet ipsorum angulorum A*a*B, A*eB*. Hæc autem est mensura duorum angulorum rectorum. Ergo &c.

THEOREMA VIII.

Si recta circulum tangat, & a puncto contactus recta intra circulum excitetur, erunt anguli in puncto contactus producti iis æquales, qui fiunt in alternis portionibus ipsius circuli.

271. Recta CD tangat circulum A*d*B (*fig.* 30. *Tab. I.*) in puncto A, a quo intra ipsum circulum recta ducatur,

Casus I.

Et quidem primo, quæ transeat per centrum *b* ipsius circuli, sitque recta A*e*. Dico, angulum DA*e* æqualem esse

esse angulo A*de*, & angulum CA*e* angulo AB*e*, qui sunt in alternis ipsius circuli portionibus.

Demonstratio.

Constat enim, tam angulos CA*e*, DA*e* (§. 256), quam angulos AB*e*, A*de* (§. 268) esse rectos, omnesque angulos rectos esse inter se æquales (§. 126).

Casus II.

Cadat modo recta ducta a puncto contactus A extra centrum, ut recta A*a*, sitque in portione A*a*B angulus A*a*B, & in portione A*d*B angulus A*d*B. Dico, angulum CAB æquare angulum A*a*B, & angulum DAB angulo A*d*B esse æqualem.

Demonstratio.

A puncto A per centrum *b* ducta intelligatur recta A*e*, & jungantur puncta B, *e* recta B*e*. Itaque, cum angulus AB*e*, utpote in semicirculo, sit rectus (§. 268) reliqui duo BA*e*, A*e*B erunt uni recto æquales (§. 177); ac proinde simul sumti æquabunt angulum DA*e*, utpote qui itidem est rectus (§. 256). Sublato propterea communi BA*e*, reliquus A*e*B æquabit reliquum DA*B* (§. 27.). Angulus autem A*d*B est æqualis angulo A*e*B (§. 266.). Ergo æqualis erit etiam angulo DAB (§. 25.). Rursus, cum duo anguli A*d*B, A*a*B in quadrilatero A*d*B*a* valeant duos rectos (§. 270), æquales erunt duobus CAB, DAB, qui duobus itidem rectis sunt æquales (§. 127.). Ostensum est autem, angulum DAB esse æqualem angulo A*d*B. Ergo etiam angulus CAB æqualis erit angulo A*a*B (§. 27.); ac proinde &c.

COROLLARIUM.

272. *Duæ rectæ circulum tangentes, si ab eodem puncto ductæ*

ctæ fuerint, erunt inter se æquales. Sic æquales erunt rectæ *eb*, *ed* (*fig.* 1. *Tab.* II.) circulum tangentes AGB. Nam ducta per puncta contactus recta *bd*, cum anguli *ebd*, *edb* sint æquales inter se (§. 24.), utpote illi æquales, qui fieret in alterna portione *bEd* (§. 271.), latera quoque *eb*, *ed* trianguli *bed* erunt inter se æqualia (§. 188.).

THEOREMA IX.

Si in circulo punctum a centro diversum sumatur, ab eoque plures rectæ in circuli peripheriam ducantur, illa erit omnium maxima, quæ per centrum transit; minima illius complementum; aliarum vero proximior maximæ remotiore major est, ac nonnisi duæ inter se æquales ab illo puncto in circuli peripheriam cadere possunt.

Sumto in circulo ACE (*fig.* 3. *Tab.* II.) puncto *b* diverso a centro *a*, ducantur ab illo in peripheriam circuli rectæ quotcunque *b*A, *b*B, *b*C, *b*D.

I.

273. Dico primo, rectam *b*A per centrum transeuntem, esse omnium maximam.

Demonstratio.

Ducto radio *a*B, cum duæ *a*A, *a*B sint æquales (§. 241), recta *b*A æquabit duo latera *a*B, *ab* trianguli B*ab* (§. 26.). Hæc autem majora sunt base B*b* (§. 181). Ergo etiam recta *b*A rectam *b*B excedet, eademque ratione ceteras omnes, quæ a puncto *b* in peripheriam duci possunt.

II.

274. Dico 2, complementum *b*D rectæ AD esse omnium minimam.

De-

Demonstratio.

Ducto radio *a*C, cum duæ *ab*, *b*C majores sint recta *a*C (§. 181), sitque *a*D rectæ *a*C æqualis (§. 241), duæ *ab*, *b*C majores quoque erunt recta *a*D (§. 71). Quamobrem, sublata communi parte *ab*, reliqua *b*C erit major reliqua *b*D (§ 29). Eodem modo ostendam, rectam *b*D a ceteris omnibus deficere.

III.

275. Dico 3, rectam *b*B proximiorem maximæ *b*A majorem esse remotiore *b*C.

Demonstratio.

Cum enim radii *a*B, *a*C sint æquales (§. 241), duo latera B*a*, *ab* trianguli B*ab* æqualia erunt duobus lateribus C*a*, *ab* trianguli C*ab*, alterum alteri. Angulus autem B*ab* est major angulo C*ab* (§. 23). Ergo etiam basis B*b* major erit base C*b* (§. 202).

IV.

276. Dico 4, nonnisi binas rectas inter se æquales a puncto *b* in peripheriam ACE cadere posse.

Demonstratio.

Ducta recta, sive radio *a*E, angulus *ba*E ponatur æqualis angulo *ba*C, & ducatur recta *b*E. Cum igitur radii *a*E, *a*C sint æquales (§.241.), & recta *ab* sit communis utrique triangulo *ba*E, *ba*C, bases *b*E, *b*C ob æqualitatem angulorum *ba*E, *ba*C erunt æquales (§. 195). Quævis autem alia linea diversa ab ipsis *b*E, *b*C vel est proximior maximæ *b*A, vel ab illa remotior, quam sint rectæ *b*E, *b*C. Ergo erit ipsis vel major, aut minor (§. 275); adeoque &c.

Co-

COROLLARIUM I.

277. Hinc *illud punctum est centrum circuli, ex quo tres rectæ inter se æquales in peripheriam cadunt*; ac proinde

COROLLARIUM II.

278. *Si in circulo duæ rectæ æquales bifariam sese mutuo secuerint, punctum sectionis erit centrum ipsius circuli.*

THEOREMA X.

Si extra circulum sumatur punctum, ab eoque plures rectæ in circuli peripheriam cadant, earum, quæ in concavam cadunt partem, maxima est, quæ per centrum transit; aliarum vero proximior maxima remotiore major est. At earum, quæ cadunt in partem convexam, minima est, quæ inter datum punctum, & circuli diametrum directe jacet; aliarum vero ea est minor quæ est proximior minimæ. Duæ postremo dumtaxat inter sæ æquales in ipsam peripheriam cadere possunt.

A puncto B sumto extra circulum ACc (*fig.* 4. *Tab.* II.) ducantur in illius peripheriam plures rectæ BA, BD, BC, quarum BA per centrum *a* transeat.

I.

279. Dico primo, rectam BA esse maximam omnium, quæ in concavam peripheriæ partem cadunt.

Demonstratio.

Ducto radio *a*D, cum radii *a*A, *a*D, sint æquales (§. 241), recta BA æqualis erit duabus B*a*, *a*D simul sumtis (§. 26.).

Duæ

Duæ autem Ba, aD majores sunt recta BD (§. 181.). Ergo etiam recta BA major erit recta BD (§. 70.). Eodem modo ratiocinare de aliis.

II.

280. Dico 2, rectam BD proximiorem maximæ BA majorem esse remotiore BC.

Demonstratio.

Ducto radio aC, cum duo latera aD, aC sint æqualia (§. 241.), latus aB sit commune utrique triangulo DaB, CaB, & angulus DaB sit major angulo CaB, basis DB erit major base CB (§. 202.); adeoque &c.

III.

281. Dico 3, rectam Bb, quæ directe jacet inter punctum B, & diametrum Ab, esse minimam omnium Be, BC, quæ cadunt in convexam peripheriæ partem ceC.

Demonstratio.

Ducatur radius ae. Itaque, cum duæ ab, ae sint æquales (§. 241.), & duæ ae, eB majores sint recta aB (§. 181.), sublatis æqualibus ae, ab, reliqua eB erit major reliqua bB (§. 29.), Eodem modo ostendam, rectam CB majorem esse ipsa bB; & ideo &c.

IV.

282. Dico 4, rectam Be proximiorem minimæ bB minorem esse remotiore CB.

Demonstratio.

Cum enim duæ aC, CB majores sint duabus ae, eB (§. 191.);
&

& rectæ aC, ae ſint æquales (§. 241.) his ſublatis, reliqua CB major erit reliqua eB (§. 29.).

V.

283. Dico 5, nonniſi binas rectas a puncto B in peripheriam circuli AcD cadere poſſe.

Demonſtratio.

Poſito ad centrum a angulo Bac æquali angulo Bae, cum due ae, ac ſint æquales (§. 241.), & recta aB ſit latus commune utrique triangulo caB, caB, erit baſis Bc æqualis baſi Be (§. 195.). Cumque alia quævis recta ducta a puncto B in peripheriæ partem ceC ſit vel proximior minimæ Bb, vel ab illa remotior, patet, nullam aliam eſſe poſſe ipſis Be, Bc æqualem (§. 282.). Eodem modo demonſtrabitur, nonniſi duas rectas inter ſe æquales cadere itidem poſſe ex puncto B in partem concavam CDA peripheriæ ipſius circuli; adeoque &c.

CAPUT IV.

De planarum figurarum ratione, & ſimilitudine.

DEFINITIO I.

284. *Figuræ rectilineæ ejuſdem generis dicuntur ſimiles, quæ ſunt inter ſe mutuo æquiangulæ, & habent latera circa æquales angulos proportionalia.* Similia nimirum erunt triangula ABC, abc (*fig.* 5. 6. *Tab.* II.), ſi angulus A fuerit æqualis angulo a, angulus B angulo b, & angulus C angulo c, ſimulque fuerint latera circa illos proportionalia, fuerit nempe $AB.AC = ab.ac$, $BC.CA = bc.ca$, $CA.AB = ca.ab$.

Co-

COROLLARIUM I.

285. Hinc *figuræ planæ rectilineæ ejusdem generis inter se mutuo æquilateræ & æquiangulæ; sunt sibi mutuo similes.*

COROLLARIUM II.

286. *Omnes figuræ rectilinæ regulares ejusdem generis sunt sibi mutuo similes.* Sunt enim inter se mutuo æquiangulæ (§. 238.); cumque earum quælibet sit æquilatera, habent latera circa æquales angulos proportionalia.

COROLLARIUM III.

287. Cum omnia latera figuræ rectilineæ regularis sint æqualia, *quolibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius figuræ regularis ejusdem generis.*

DEFINITIO II.

288. *Duo arcus, duo sectores, duoque circulorum segmenta dicuntur similia, quæ eandem habent rationem ad integram sui circuli peripheriam, aut aream.* Nimirum similes erunt arcus BC, *bc* (*fig.* 7. 8. *Tab.*II.) duorum circulorum DBC, *dbc* si, ut arcus BC ad totam peripheriam DBC, ita fuerit arcus *bc* ad totam peripheriam *bdc*. Similes quoque erunt sectores BAC, *bac*, si itidem fuerit sector BAC ad totum circulum DBC, ut sector *bac* ad totum circulum *dbc*. Eodem modo loquere de segmentis.

COROLLARIUM.

289. Cum partes similes duarum magnitudinum sint directe inter se, ut ipsæ magnitudines totales (§. 94.) *arcus similes duorum circulorum erunt directe, ut integre eorundem*

peripheriæ; & sectores similes, sicuti etiam similia segmenta, ut integri ipsi circuli.

DEFINITIO III.

290. *Duæ figuræ rectilineæ similes dicuntur super duas rectas similiter descriptæ, cum duæ ipsæ lineæ sunt latera ipsarum homologa, & æquales earundem anguli eodem modo sese consequuntur.* Ut si rectæ BC, *bc* (*fig.* 5. 6. *Tab.*II.) fuerint latera homologa similium triangulorum ABC, *abc*, fueritque angulus B æqualis angulo *b*, angulus C æqualis angulo *c*, & angulus A angulo *a*, duo ipsa triangula erunt super rectas BC, *bc* similiter descripta.

DEFINITIO IV.

291. *Duo parallelogramma, sicuti etiam duo triangula plana rectilinea, dicuntur reciprocare sibi mutuo bases, & altitudines, cum unius basis est ad basim alterius, ut reciproce altitudo posterioris ad altitudinem prioris.* Ut si basis *bc* fuerit ad basim BC, ut altitudo AX ad altitudinem *ax* (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.), tam duo parallelogramma *ec*, EC, quam duo triangula *bac*, BAC, dicentur reciprocare sibi mutuo bases, & altitudines.

DEFINITIO V.

292. *Centrum figuræ rectilineæ regularis est punctum sumtum in illius area, a quo omnes rectæ ductæ ad singulos ipsius figuræ angulos, sunt inter se æquales.* Ut si æquales inter se fuerint rectæ *a*A, *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, *a*F (*fig.* 27. *Tab.* I.) ductæ a puncto *a* ad singulos angulos hexagoni regularis ACE, punctum *a* erit ipsius hexagoni centrum. Extare porro in qualibet figura rectilinea regulari hujusmodi punctum, ex eo evincitur, quod cuilibet figuræ rectilineæ regulari circulus circumscribi possit, cujus peripheria per apices omnium angulorum ipsius figuræ simul transeat.

De-

DEFINITIO VI.

293. *Radius figuræ rectilineæ regularis est quælibet recta linea ducta ab illius centro ad angulorum apices*. Sic quælibet rectarum *aB*, *aC*, *aD* &c. est radius hexagoni regularis ACE (*fig*. 27. *Tab*. I.)

COROLLARIUM.

294. Cum omnia isoscelia triangula A*a*B, B*a*C, C*a*D &c. determinata a radiis *a*A *a*B &c. sint inter se mutuo æquilatera, ac proinde etiam æquiangula (§. 193.), & æqualia (§. 165.), patet, *figuram quamcumque rectilineam regularem dividi posse in tot isoscelia, inter se mutuo æquilatera, æquiangula, & æqualia triangula, quot sunt ipsius figuræ latera; omnesque horum triangulorum verticales angulos in centro positos, esse æquales inter se*; ac proinde *quatuor angulos rectos, qui fieri possunt circa centrum figuræ* (§. 130.) *in tot angulos tunc æquales divisos esse, quot sunt ipsius figuræ latera*.

AXIOMA.

295. *Figuræ, quæ eidem sunt similes, sibi quoque mutuo sunt similes*.

Hypothesis I.

296. Linea quæcunque assumitur veluti composita ex punctis, videlicet ex magnitudinibus adeo exiguis, ut earum quælibet sit minor quacunque assignabili quantitate.

Hypothesis II.

297. Concipitur parallelogrammum oriri ex parallela elevatione rectæ lineæ in eodem semper plano existentis,

 quam

quam elevationem metitur ipsius parallelogrammi altitudo. Sic parallelogrammum ABCD (*fig.* 11. *Tab.*II.) oritur ex parallela elevatione basis BC in eodem semper existentis plano, cujus elevationis mensura est altitudo DE.

COROLLARIUM.

298. Cum in hujusmodi elevatione rectæ generatricis BC toties ipsa recta sumatur, quot sunt puncta in altitudine DE, *componitur parallelogrammum quodcunque ex tot rectis lineis inter se æqualibus, & parallelis, quot in illius altitudine puncta numerantur.* Ut si quinque fuerint puncta in altitudine DE, parallelogrammum ABCD constabit ex quinque rectis lineis æqualibus & parallelis BC, *ab*, *cd*, *fe*, AD. Spectari idcirco optime potest parallelogrammum veluti factum ex ductu basis in altitudinem, ut proinde si basis BC ponatur $= m$, & altitudo DE $= n$, productum mn aream parallelogrammi ABCD optime exprimat.

LEMMA.

Rectæ parallelæ, quæ rectam oblique incidentem in partes æquales dividunt, habent intervalla æqualia; & vicissim parallelæ æqualia intervalla habentes; rectam oblique incidentem in partes æquales dividunt; & si in eas duæ rectæ parallelæ inciderint; in partes æquales dividuntur.

I.

299. Recta *ae* (*fig.* 12. *Tab.* II.) oblique incidens in rectas parallelas MN, PQ, RS dividatur in partes æquales *ab*, *bc*. Dico, rectas MN, PQ, RS æqualia intervalla habere, nimirum æqualia esse perpendicula *ae*, *bm*.

Demonstratio.

Cum anguli *bcm*, *abe* sint æquales (§. 151.) sicuti etiam an-

anguli *bmc*, *acb* (§. 245.), utpote recti ex hypothesi, etiam reliquus angulus *cbm* trianguli *cbm* æqualis erit reliquo *bae* trianguli *bae* (§. 178.) Æqualia autem posita sunt latere *bc*, *ab*, quæ illis adjacent. Ergo latera quoque *bm*, *ae* erunt æqualia (§. 199.).

II.

300. Vicissim vero æqualia sint perpendicula *ae*, *bm* rectarum parallelarum MN, PQ, RS. Dico, partes *ab*, *bc* esse æquales.

Demonstratio.

Ostensa, ut in præcedenti, æqualitate angulorum *cbm*, *bae* in triangulis *mbc*, *eab*, cum angulis æqualibus *cbm*, *bae**, *bme*, *aeb* æqualia ex hypothesi adjaceant latera *bm*, *ae*, latus quoque *bc* erit æquale lateri *ab* (§. 199.).

III.

301. In rectas parallelas MN, PQ, RS (*fig.* 12. *Tab.* II.) æqualia habentes intervalla incidant rectæ parallelæ *ac*, *nf*. Dico, omnes earum partes *ab*, *bc*, *nd*, *df* esse inter se æquales.

Demonstratio.

Cum enim propter hypothesim quadrilatera *ndba*, *bdfc* sint parallelogramma, æqualia erunt latera *ab*, *nd*, sicuti etiam *bc*, *df* (§. 222.). Est autem etiam $ab = bc$, & $nd = df$ (§. 300.). Ergo erit $ab = bc = nd = df$ (§. 24.).

THEOREMA I.

Si in triangulo plano rectilineo ducatur recta basi parallela, secans utrumque trianguli latus, proportionaliter latera ipsa secabit: segmenta unius erunt in eadem proportione ad segmenta alterius: utrumque latus eandem ad sua respective segmenta rationem habebit: segmenta laterum erunt, ut ipsa latera: basis erit ad secantem, ut latus ad segmentum; & ut latus ad basim, ita erit segmentum ad rectam secantem.

In triangulo NMP. (*fig.* 13. *Tab.* II.) ducatur recta RS basi NP parallela.

I.

302. Dico 1, rectam RS proportionaliter secare latera NM, MP, hoc est esse MR. RN = MS. SP.

Demonstratio.

Latus MN ponatur divisum in quinque partes æquales M*a*, *ac*, *c*R, R*e*, *e*N, ex quibus tres sint in segmento MR, & duæ in segmento RN. Ex punctis autem *a*, *c*, *e* ductæ intelligantur ad latus oppositum MP, rectæ *ab*, *cd*, *ef* parallelæ rectis RS, NP, atque adeo etiam inter se, quæ intervalla æqualia habebunt (§. 299.). Itaque divisum erit etiam latus MP in quinque partes æquales M*b*, *bd*, *d*S, S*f*, *f*P (§. 300.), & ea quidem lege, ut tres sint in segmento MS, & duæ in segmento SP. Ergo erit MR. RN=MS. SP (§. 38.).

I I.

303. Dico 2, esse RN. SP = MR. MS.

Demonstratio.

Quippe, cùm sit MR. RN = MS. SP (§. 302.) erit etiam

tiam *alternando* RN. SP = MR. MS (§. 92.).

III.

304. Dico 3, esse MN. MR = MP. MS; nec non MN. RN = MP. SP.

Demonstratio.

Cum enim sit MR. RN = MS. SP (§. 302.), etiam *componendo* erit MN. MR = MP. MS (§. 97), sicuti etiam MN. RN = MP. SP (§. 95).

IV.

305. Dico 4, segmenta esse, ut ipsa latera, nimirum esse MR. MS = MN. MP, sicuti etiam RN. SP = MN. MP.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit MN. MR = MP. MS, & MN. RN = MP. SP (§. 304), erit etiam *invertendo*, MR. MN = MS. MP, & RN MN = SP. MP (§. 90.). Quamobrem *alternando*, erit quoque MR. MS = MN. MP, & RN. SP = MN. MP (§. 92).

V.

306. Dico 5, basi NP (*fig.* 14. *Tab.* II.) esse ad rectam secantem RS, ut latus MN ad segmentum MR.

Demonstratio.

Nam, posita divisione lateris MN in quinque partes, ut supra, ductisque rectis *ab*, *cd*, R*g*, *ef* parallelis lateri MP divisa erit basis NP in quinque partes æquales, ex quibus tres erunt, scilicet R*m*, *mn*, *n*S, in recta secante RS (§ 301).

 Ergo

Ergo erit, ut latus MN ad ſegmentum MR; ita baſis NP ad ſecantem RS, nimirum ut 5 ad 3.

VI.

307. Dico 6, ſegmentum MR lateris MN eſſe ad rectam ſecantem RS, ut eſt totum latus MN ad baſim NP.

Demonſtratio.

Quippe, cum ſit MN. MR = NP. RS (§. 306.), erit quoque *alternando*, MR. RS = MN. NP (§. 92.). Itaque &c.

COROLLARIUM I.

308. *In triangulo plano rectilineo recta ducta a vertice ad baſim, in eadem proportione ſecat baſim, & rectam baſi parallelam.* Sic in triangulo *bac* (*fig.* 15. *Tab.* II.) recta *am* ducta a vertice *a* ad baſim *bc* ita ſecat ipſam baſim, rectamque illi parallelam *de*, ut ſit *bm*. *mc* = *dn*. *ne*. Cum enim ſit *bm*. *dn* = *am*. *an*, ſicuti etiam *cm*. *en* = *am*. *an* (§. 307.), erit quoque *bm*. *dn* = *cm*. *en* (§. 25.); adeoque etiam *bm*. *cm* = *dn*. *ne* (§. 92).

COROLLARIUM II.

309. *In omni triangulo plano rectilineo recta baſi parallela aufert triangulum ſimile toti triangulo.* Nimirum ducta in triangulo *bam* (*fig.* 15. *Tab.* II.) recta *dn* parallela baſi *bm*, triangulum *dna* erit ſimile toti triangulo *bma*. Duo enim hujuſmodi triangula ſunt ſibi mutuo æquiangula; cum angulus *adn* adæquet angulum *abm*, & angulus *and* angulum *amb* (§. 150.), angulus vero *bam* ſit communis utrique triangulo. Habent etiam latera circa æquales angulos proportionalia; cum ſit *ad*. *dn* = *ab*. *bm*, ſicuti etiam *dn*. *na* = *bm*. *ma* (§. 307.), necnon *ad*. *an* = *ab*. *am* (§. 305.).

Co-

COROLLARIUM III.

310. *Triangula æquiangula sunt similia*. Ut si angulus A trianguli ABC fuerit æqualis angulo *a* trianguli *abc* (*fig*. 5. 6. *Tab*. II.) angulus B angulo *b*, & angulus C angulo *c*, duo triangula ABC, *abc* erunt similia. Cum enim anguli BAC, *bac* ob æqualitatem sibi mutuo congruant, nequit triangulum BAC superimponi triangulo *bac*, quin, congruentibus angulis A, *a* basis BC sit parallela basi *bc* (§. 146.) ob æqualitatem scilicet angulorum ABC, *abc*; adeoque &c. (§. 309.)

COROLLARIUM IV.

311. Cum in triangulis similibus ABC, *abc* (*fig*. 5.6. *T*. II.) homologa sint latera AB, *ab*, BC, *bc* *CA, *ca* (§. 52.), & æquales anguli A, *a* * B, *b* * C, *c* perspicuum remanet, *in triangulis similibus homologa esse latera, quæ æqualibus angulis opponuntur*, & vicissim *angulos esse æquales, qui homologis lateribus subtenduntur*.

THEOREMA II.

Recta ita secans duo trianguli latera, ut segmenta sumta a vertice sint directe inter se, ut ipsa latera, est basi parallela.

312. Recta *de* ita secet latera *ab*, *ac* trianguli *bac* (*fi*. 15. *T*. II.) ut sit *ab* ad *ac*, quemadmodum est *ad* ad *ae*. Dico, rectam *de* esse parallelam basi *bc*.

Demonstratio.

Enimvero, si recta *de* non est parallela basi *bc*, esto recta *dx* ipsi *bc* parallela. Profecto recta *dx* ita non dividit latus *ac* in *x*, ut si *ac*. *ax* $=$ *ac*. *ae* (§. 40.) ob inæqualitatem scilicet segmentorum *ae*, *ax*. Est autem *ab*.*ad* $=$ *ac*. *ae* (§. 29.)

(§. 92.) ex eo quod sit $ab.ac = ad.ae$ per hypothesim: Ergo neque erit $ab.ad = ac.ax$. Hoc autem fieri nequit (§. 304.), si recta dx sit parallela basi bc. Igitur recta dx non est parallela basi bc; & eadem ratione nulla alia recta diversa a recta de erit basi bc parallela. Itaque &c. Hinc

COROLLARIUM I.

313. *Recta ita secans duo trianguli latera, ut segmenta sumta a vertice sint directe inter se, ut ipsa latera, aufert triangulum simile toti triangulo (§. 309.).*

COROLLARIUM II.

314. Hinc *duo triangula habentia unum angulum uni angulo æqualem, & latera circa illos proportionalia, sunt similia.* Ut si angulus A trianguli BAC fuerit æqualis angulo a trianguli bac (*fig.* 5. 6. *Tab.* II.), & latus AB ad latus AC, ut latus ab ad latus ac, duo ipsa triangula erunt similia.

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rectilineo recta perpendicularis ducta ab angulo recto ad basim, duo efficit triangula toti, & inter se similia.

Ab angulo recto BAC trianguli rectilinei BAC (*fig.* 16. *Tab.* II.) ad basim BC ducta intelligatur recta perpendicularis AD.

I.

315. Dico primo, utrumque triangulum ADB, ADC esse simile toti triangulo BAC.

Demonstratio.

Cum enim ob hypothesim angulus ADB sit rectus, is æqua-

æquabit angulum BAC. Angulus autem ABC eſt communis utrique triangulo ADB, BAC. Ergo reliquus angulus BAD trianguli ADB æquabit reliquum angulum ACB trianguli BAC (§. 178.). Duo igitur triangula ADB, BAC ſunt inter ſe mutuo æquiangula; ac proinde ſimilia (§. 310.). Eodem modo demonſtrabitur, etiam triangulum ADC eſſe ſimile triangulo BAC; & ideo &c.

II.

316. Dico 2, triangula ADB, ADC etiam inter ſe eſſe ſimilia.

Demonſtratio.

Enimvero, cum duo triangula BDA, CDA ſint ſimilia triangulo BAC (§. 315.), ſibi quoque mutuo erunt ſimilia (§. 295.).

COROLLARIUM I.

317. *Recta perpendicularis AD (fig. 16. Tab. II.) eſt media proportionalis inter partes BD, DC baſis BC.* Cum enim anguli BDA, ADC ſimilium triangulorum BDA, ADC, utpote recti, ſint æquales; erunt latera circa illos proportionalia, erit nempe ∺ BD.DA.DC (§. 284.). Hinc

COROLLARIUM II.

318. *Recta quæcunque in ſemicirculo incumbens diametro ad angulos rectos eſt media proportionalis inter partes ipſius diametri.* Sic recta perpendicularis AD in ſemicirculo BAC (*fig.* 16. *Tab.* II.) eſt media proportionalis inter ſegmenta diametri BD, DC. Ductis enim rectis AB, AC, rectus eſt angulus BAC (§. 268.).

COROLLARIUM III.

319. *Latus AC in triangulo rectangulo BAC* (*fig.* 16. *Tab.* II.) *eſt*

est media proportionalis inter totam basim BC, & partem DC; sicuti etiam latus AB inter totum basim BC, & partem BD. Enimvero, cum similia sint triangula BAC, ADC, sicuti etiam triangula BAC, BDA (§ 315), & angulus BCA sit communis utrique triangulo BAC, ADC, quemadmodum etiam angulus ABC utrique triangulo BAC, BDA, proportionalia erunt latera, quæ circa illos *respective* habentur, vedelicet erit BC. CA = CA.DC, & BC. BA = BA BD (§. 284.).

THEOREMA IV.

Eadem est ratio laterum homologum duarum figurarum rectilinearum similium.

320. Sint duæ figuræ rectilineæ similes ABC, *abc*, (*fig.* 5.6. *Tab.* II.) quarum latera homologa sint AB. *ab* * BC, *bc* * CA, *ca*. Dico, esse AB. *ab* = BC. *bc* = CA. *ca*.

Demonstratio.

Enimvero, cum, stante hypothesi, sit AB. BC = *ab*. *bc*; BC.CA = *bc.ca*, CA.AB = *ca*. *ab* (§ 284.) erit quoque AB. *ab* = BC.*bc*, BC. *bc* = CA. *ca.ca*, CA. *ca* = AB.*ab* (§.92.); ac proinde AB. *ab* = BC. *bc* = CA. *ca* (§. 24.).

THEOREMA V.

Altitudines triangulorum similium, quorum bases sint latera ipsorum homologa, sunt directe inter se, ut eorum bases.

321. Sint duo triangula similia MNP, *mnp* (*fig.* 17. 18. *Tab.* II.) quorum bases MP, *mp* sint latera ipsorum homologa, altitudines vero rectæ NX, *nx*. Dico, altitudines NX, *nx* esse directe inter se, ut bases MP, *mp*,

Ca-

Casus Primus.

Et quidem primo altitudines NX, *nx* cadant intra ipsorum triangulorum latera.

Demonstratio.

Cum enim anguli M, *m* ex hypothesi sint æquales, sicuti etiam anguli X, *x*, utpote recti (§.123.), etiam reliquus angulus MNX trianguli MNX erit æqualis reliquo angulo *mnx* trianguli *mnx* (§. 178.), duoque idcirco triangula MNX, *mnx* erunt sibi mutuo æquiangula, ac proinde similia (§. 310.); eruntque latera ipsorum homologa MN, *mn*, NX, *nx* (§.311.). Quamobrem erit NX . *nx* = MN . *mn* (§. 320.). Est autem eadem ratione etiam MP. *mp* = MN. *mn*. Ergo erit quoque NX . *nx* = MP . *mp* (§. 25.).

Casus Secundus.

Cadant modo altitudines NX, *nx* (*fig.* 19. 20. *Tab.* I.) extra bases MP, *mp*. Adhuc dico, esse NX . *nx* = MP . *mp*.

Demonstratio.

Enimvero, cum tam duo anguli MPN, NPX, quam duo *mpn*, *npx* valeant duos rectos (§. 127.), duo MPN, NPX æquales erunt duobus *mpn*, *npx* (§. 24.). Æquales sunt autem ex hypothesi duo MPN, *mpn*. Ergo duo quoque NPX, *npx* erunt inter se æquales (§. 27.). Constat autem, etiam duos PXN, *pxn* esse æquales inter se, utpote rectos (§.123.). Igitur reliquus itidem angulus PNX trianguli PNX erit æqualis reliquo *pnx* trianguli *pnx* (§. 178.) ac proinde duo ipsa triangula, utpote sibi mutuo æquiangula, erunt similia (§. 310.), eorumque latera homologa erunt NP, *np*, NX, *nx* (§. 311.). Erit ergo NX. *nx* = NP.

NP. *np*. (§. 320.). Est autem eandem quoque ob causam MP. *mp* = NP. *np* in triangulis similibus MNP. *mnp*. Ergo erit NX. *nx* = MP. *mp* (§. 25.).

Casus Tertius.

Altitudines demum triangulorum similium coincidant cum uno eorundem latere. Nimirum sint duo triangula similia MXN, *mxn* (*fig.* 17. 18. *Tab.* II.) quorum altitudines sint latera ipsorum homologa NX, *nx*. Dico, esse NX. *nx* = MX. *mx*.

Demonstratio.

Patet ex §. 320.

THEOREMA VI.

Parallelogramma æqualium basium, & altitudinum sunt æqualia.

322. Æquales sint bases FN, TV parallelogrammorum MN, RV (*fig.* 21. 22. *Tab.* II.), sicuti etiam eorum altitudines PX, SQ. Dico, ipsa parallelogramma esse æqualia.

Demonstratio.

Cum enim parallelogrammum MN consurgat ex ductu basis FN in altitudinem PX, & parallelogrammum RV ex ductu basis TV in altitudinem SQ (§. 298.), si tam bases, quam altitudines sunt *respective* inter se æquales, ipsa quoque parallelogramma erunt æqualia (§. 68.).

COROLLARIUM I.

323. *Si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & altitudines, parallelogrammum erit duplum trianguli.* Ut si basis FN parallelogrammi MN fuerit æqualis basi TV trian-

trianguli TSV (*fig.* 21. 22. *Tab.* II.), & altitudo PX unius altitudini SQ alterius, parallelogrammum MN erit duplum trianguli TSV. Constituto namque parallelogrammo RV, constat parallelogrammum RV esse duplum trianguli TSV (§. 227). Est autem parallelogrammum MN æquale parallelogrammo RV ex facta hypothesi. Ergo etiam parallelogrammum MN est duplum trianguli TSV (§. 70.). Hinc

COROLLARIUM II.

324. *Triangula plana rectilinea sunt directe inter se, ut parallelogramma habentia æquales cum illis bases, & altitudines.* Videlicet triangulum *bac* est ad triangulum BAC (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.), ut parallelogrammum *ec* ad parallelogrammum EC (§. 94.).

COROLLARIUM III.

325. Quamobrem *triangula plana rectilinea æqualium basium, & altitudinum sunt inter se æqualia* (§. 45.)

THEOREMA VII.

Parallelogramma inæqualium basium, sed ejusdem altitudinis sunt directe, ut eorum bases; & quæ habent æquales bases, sed inæquales altitudines, sunt directe, ut altitudines.

I.

326. Parallelogramma AC, FH (*fig.* 23. 24. *T.* II.) inæquales habeant bases BC, GH, sed æquales altitudines ED, KL. Dico, parallelogrammum AC esse ad parallelogrammum FH, ut est basis BC ad basim GH.

Demonstratio.

Ponatur basis BC $= x$, & basis GH $= y$; altitudo vero

ED,

ED, adeoque etiam KL $=m$. Erit ergo parallelogrammum AC $=mx$, & parallelogrammum FH $=my$ (§. 298). Constat autem, esse $mx.my=x.y$ (§. 77). Ergo erit etiam AC.FH $=x.y$, nimirum ut bases.

II.

327. Sint modo duo parallelogrammum FH, MR (*fig.* 24. 25. *Tab.* II.) æquales e contrario habentes bases GH, PR, sed inæquales altitudines KL, NS. Dico, parallelogrammum FH esse ad parallelogrammum MR, ut altitudo KL ad altitudinem NS.

Demonstratio.

Haud dissimilis est a præcedenti.

COROLLARIUM I.

328. *Triangula inæqualium basium, & ejusdem altitudinis, sunt directe, ut bases*; & vicissim, *quæ habent æquales bases sunt, ut altitudines*. Triangula enim sunt, ut parallelogramma super easdem bases, & sub iisdem *respective* altitudinibus constituta (§. 324.).

COROLLARIUM II.

329. *Si altitudo KL trianguli GKH fuerit æqualis altitudini ED parallelogrammi AC* (*fig* 23. 24. *Tab.* II.); *sed basis GH trianguli dupla basis BC parallelogrammi, erit triangulum GKH æquale parallelogrammo AC*. Est enim tam triangulum GKH (§. 227) quam parallelogrammum AC (§. 326) pars dimidia parallelogrammi FH. Haud dissimili ratione, *si basis GH trianguli GKH fuerit æqualis basi PR parallelogrammi MR* (*fig.* 24. *fig.* 25.), *sed altitudo KL trianguli dupla altitudinis NS parallelogrammi, triangulum GKH parallelogrammo MR erit æquale*.

THEO-

THEOREMA VIII.

Parallelogramma inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

330. Sint duo parallelogramma *ebca*, EBCA (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.), quorum tum bases *bc*, BC, tum altitudines *ax*, AX sint inæquales. Dico, parallelogrammum *ebca* esse ad parallelogrammum EBCA in ratione composita ex ratione basis *bc* ad basim BC, & ex ratione altitudinis *ax* ad altitudinem AX.

Demonstratio.

Basis *bc* ponatur = P, & basis BC = *p*; altitudo *ax* = M, & altitudo AX = *m*. Erit ergo parallelogrammum *ebca* = PM, & parallelogrammum EBCA = *pm* (§. 298.). Constat autem, productum PM esse ad productum *pm* in ratione composita ex ratione magnitudinis P ad magnitudinem *p*, & ex ratione magnitudinis M ad magnitudinem *m* (§. 107.). Ergo in eadem quoquoque ratione erunt inter se parallelogramma *ebca*, EBCA; adeoque &c.

COROLLARIUM.

331. *Triangula inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.* Sunt enim, ut parallelogramma super easdem *respective* bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§. 324.).

THEOREMA IX.

Parallelogramma reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æqualia.

332. Esto basis *bc* parallelogrammi *ebca* ad basim BC parallelogrammi EBCA (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.) *reciproce*, ut alti-

tudo AX ad altitudinem *ax*. Dico, parallelogramma *ebca*, EBCA esse æqualia.

Demonstratio.

Cum ex facta hypothesi sit $bc.BC = AX.ax$, erit $bc \times ax = BC \times AX$ (§. 73.). Parallelogrammum autem *ebca* est æquale producto $bC \times ax$, & parallelogrammum EBCA producto $BC \times AX$ (§. 298.). Ergo erit quoque $ebca = EBCA$ (§. 24.); adeoque &c.

COROLLARIUM.

333. *Triangula reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines sunt æqualia.* Sic duo triangula *bac*, BAC erunt æqualia, si bases *bc*, BC fuerint *reciproce*, ut altitudines AX, *ax*. Sunt enim, ut parallelogramma *ec*, EC (§. 324.).

THEOREMA X.

Inæqualium circulorum æquales anguli ad centrum similibus arcubus insistunt; & vicissim, qui similibus arcubus insistunt, sunt æquales.

I.

334. Æquales sint anguli BAC, *bac* (*fig.* 7. 8. *Tab.* II.) in centro positi circulorum inæqualium DBC, *dbc*. Dico, arcus BC, *bc*, quibus insistunt, esse sibi mutuo similes.

Demonstratio.

Cum enim eadem sit ratio utriusque anguli BAC, *bac* ad quatuor rectos (§. 70.), eadem erit ratio utriusque arcus BC, *bc* ad integram sui circuli peripheriam (§. 247.). Ergo arcus ipsi BC, *bc* sunt sibi muto similes (§. 288.).

335. Si-

II.

335. Similes vicissim sint arcus BC, *bc*. Dico, angulos BAC, *bac* esse æquales.

Demonstratio.

Enimvero, cum uterque arcus BC, *bc* eandem habeat rationem ad integram sui circuli peripheriam (§.288.), eadem quoque erit ratio utriusque anguli BAC, *bac* ad quatuor rectos (§. 247.). Igitur duo ipsi anguli sunt æquales (§.70.).

COROLLARIUM.

336. *Duo quilibet radii circulorum circa idem punctum descriptorum similes arcus intercipiunt.* Similes nimirum sunt arcus BC, *mn* circulorum DBC, *emn* (*fig.*7. *Tab.* II.) idem centrum habentium, intercepti inter radios AB, AC. Idem quippe angulus BAC utrique arcui insistit.

LEMMA I.

Si ex centro duorum polygonorum regularium ejusdem generis ad singulos ipsorum angulos ducantur radii, ipsa polygona divisa erunt in totidem ex æquo triangula sibi mutuo similia.

337. Sint duo hexagona regularia BDF, *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) ex quorum centro ad singulos angulos ducantur radii AB, AC, AD &c. *ab*, *ac*, *ad* &c. Jam patet, hexagonum DBF divisum esse in tot triangula, in quot divisum est hexagonum *dbf*. Dico, triangulum DAE esse simile triangulo *dae*.

Demonstratio.

Cum tot habeantur anguli æquales circa centrum A,

 quot

quot sunt circa centrum *a* (§. 294) angulus DAE erit æqualis angulo *dae*. Est autem latus AD ad latus AE, ut latus *ad* ad latus *ae*; quod nempe sit AD=AE, & *ad*=*ae*. Ergo duo triangula DAE, *dae* sunt similia (§. 314.). Eodem modo ratiocinare de aliis. Itaque &c.

COROLLARIUM.

338. Cum radii AD, *ad* sint latera homologa triangulorum similium DAE, *dae* (§. 311), sitque propterea AD. *ad*=DE. *de* (§. 320), manifeste apparet, *radios duorum polygonorum regularium ejusdem generis esse directe inter se, ut duo quælibet ipsorum latera*.

THEOREMA XI.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum similium sunt directe inter se, ut duo quælibet homologa ipsarum latera.

339. Sint duæ figuræ rectilineæ similes ABC, *abc* (*fig.* 5. 6. *Tab.*II.), quarum latera homologa sint AB, *ab*, BC, *bc*, CA, *ca*. Dico, perimetrum ABC esse ad perimetrum *abc*, ut est latus BC ad latus sibi homologum *bc*.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit AB. *ab*=BC. *bc*=CA. *ca* (§. 320), erit quoque AB+BC+CA. *ab*+*bc*+*ca*=BC. *bc* (§. 101); adeoque &c.

COROLLARIUM.

340. *Perimetri polygonorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut duo quælibet ipsorum latera, atque adeo etiam ut eorum radii*. Sic perimeter polygoni regularis BDF est ad perimetrum polygoni regularis *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) ut latus DE ad latus *de*; adeoque etiam

ut

ut radius AD ad radium *ad*. Duo enim hujusmodi polygona sunt similia (§. 286), & homolga sunt ipsorum latera DE, *de* (§. 52); eorumque radii AD, *ad* sunt directe inter se, ut latera DE, *de* (§. 338.).

LEMMA II.

Duæ quæcunque figuræ rectilineæ similes in totidem ex æquo similia triangula resolvi possunt.

341. Sint duæ figuræ rectilineæ similes BDF, *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.). Dico, eas in totidem ex æquo similia triangula resolvi posse.

Demonstratio.

Super latera ipsarum homologa DE, *de* erecta concipiantur duo triangula similia, similiterque posita DAE, *dae*. Tum ab horum vertice A, *a* ducantur ad singulos utriusque figuræ angulos rectæ AC, AB &c. *ac*, *ab &c.* Jam patet, utramque figuram divisam esse in tot triangula, quot sunt ipsarum figurarum latera. Dico autem, triangulum DAC simile esse triangulo *dac*, triangulum CAB triangulo *cab*, atque ita de ceteris. Cum enim anguli CDE, *cde* sint æquales (§. 284), sicuti eadem ratione etiam anguli ADE, *ade*, reliquus itidem CDA erit reliquo *cda* æqualis (§. 27.). Est autem AD. *ad* ⩧ DE. *de* (§. 320), eandemque ob causam etiam CD. *cd* ⩧ DE. *de*. Ergo erit AD. *ad* ⩧ CD. *cd* (§. 25), & ideo AD. CD ⩧ *ad*. *cd* (§. 92). Itaque triangula CDA, *cda*, utpote habentia unum angulum CDA uni angulo *cda* æqualem, & latera circa illos proportionalia, sunt similia (§. 314). Eodem modo ostendentur similia etiam duo CAB, *cab*, & sic de ceteris. Igitur &c.

THEOREMA XII.

Duæ quæcunque figuræ rectilineæ similes sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum.

I.

342. Sint primo duo triangula similia MNP, *mnp* (*fig.* 17. 18. *T.*II.). Dico, triangulum MNP esse ad triangulum *mnp* in ratione *duplicata* lateris MP ad latus homologum *mp*.

Demonstratio.

Triangula MNP, *mnp* sunt inter se in ratione composita ex ratione basium MP, *mp*, & ex ratione altitudinum NX, *nx* (§. 331.); cumque ratio basium MP, *mp* non sit diversa ratione altitudinum NX, *nx* (§. 321.), triangula ipsa sunt inter se in ratione composita ex ratione basium, sive laterum homologorum MP, *mp* semel ducta in seipsam. Hæc autem est ratio ipsorum laterum *duplicata* (§. 54.). Ergo duo triangula MNP, *mnp* sunt in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum MP, *mp*.

I I.

343. Sint modo duæ figuræ rectilineæ similes a triangulo diversæ BDF, *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) quarum latera homologa sint DE, *de*. Dico, eas quoque esse inter se in ratione *duplicata* ipsorum laterum.

Demonstratio.

Posita divisione utriusque figuræ in totidem ex æquo triangula similia DAE, *dae*, EAF, *eaf* &c. (§. 341.), cum duo quælibet similia triangula sint in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum (§. 342.), triangulum DAE erit ad

trian-

triangulum *dae* in ratione *duplicata* laterum DE, *de*; triangulum EAF ad triangulum *eaf* in ratione *duplicata* laterum EF, *ef*, atque ita de ceteris. Eadem autem est ratio laterum homologorum figurarum rectilinearum similium (§. 320.): Ergo singula triangula constitutiva figuræ BDF erunt ad triangulum sibi simile constitutivum figuræ *bdf* in ratione *duplicata* laterum DE, *de*. Quamobrem tota figura BDF est ad totam figuram *bdf* in ratione *duplicata* lateris DE ad latus homologum *de* (§. 101.).

COROLLARIUM I.

344. Hinc vicissim *latera homologa duarum figurarum rectilinearum similium sunt in ratione ipsarum figurarum subduplicata* (§. 57.).

COROLLARIUM II.

345. *Duo quæcunque plana rectilinea regularia ejusdem generis sunt in ratione duplicata suorum laterum*. Similia enim sunt inter se (§. 286.), & quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius (§. 287.).

COROLLARIUM III.

346. *Duæ figuræ rectilineæ similes sunt inter se, ut quadrata suorum laterum homologorum*. Sic duo plana rectilinea similia BDE, *bde* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) sunt inter se, ut quadrata laterum homologorum DE, *de*. Sunt enim & hujusmodi quadrata in ratione *duplicata* eorundem laterum DE, *de* (§. 345.).

COROLLARIUM IV.

347. *Plana regularia rectilinea ejusdem generis sunt in ratione duplicata suorum radiorum*. Similia siquidem sunt inter se

 (§. 286.)

(§. 286.), atque radiorum ratio diversa ab ea non est, quam habent duo quælibet ipsorum latera (§. 338.).

COROLLARIUM V.

348. *Plana regularia rectilinea ejusdem generis sunt directe inter se, ut quadrata suorum laterum, & radiorum respective.* Sunt enim & ipsa quadrata in ratione *duplicata* suorum laterum (§. 345.).

COROLLARIUM VI.

349. *Si fuerint tres rectæ lineæ continuo geometrice proportionales, figura rectilinea descripta super primam erit ad figuram rectilineam similem similiterque descriptam super secundam, ut illarum prima ad tertiam.* Ut si, positis tribus rectis continuo geometrice proportionalibus *bc*, *dm*, *x* (*fig.* 28. 29. *T*. II.) super primam *bc*, & secundam *dm* similiter describantur duo similia triangula *bac*, *dem*, triangulum *bac* erit ad triangulum *dem*, ut prima *bc* ad tertiam *x*. Cum enim prima *bc* sit ad tertiam *x* in ratione *duplicata* ipsius primæ *bc* ad secundam *dm* (§. 109.), atque in hac eadem ratione primæ ad secundam sit triangulum *bac* ad triangulum *dem* (§. 342.) patet propositum.

LEMMA III.

Circulus est polygonum regulare infinitorum laterum

350. Cum enim polygonum regulare eo magis ad circulum accedat, quo minora sunt, atque adeo numero plura ipsius latera, si hæc ponantur infinite parva, atque propterea numero infinita, polygonum minime a circulo descriminabitur.

COROLLARIUM.

351. Hinc *omnes circuli sunt polygona regularia ejusdem generis*; atque adeo *sunt omnes sibi mutuo similes* (§. 286.).

THEO-

THEOREMA XIII.

Peripheriæ circulorum sunt directe inter se, ut eorum radii.

352. Sint duo circuli EBD, *ebd* (*fig*. 30. 31. *Tab*. II.) quorum radii sint rectæ AB, *ab*. Dico, peripheriam circuli EBD esse ad peripheriam circuli *ebd*, ut radius AB ad radium *ab*.

Demonstratio.

Cum enim circuli EBD, *ebd* sint polygona regularia ejusdem generis (§. 351.), eorum perimetri erunt, ut ipsorum radii AB, *ab* (§. 340.).

COROLLARIUM I.

353. *Peripheriæ circulorum sunt directe, ut ipsorum diametri*. Ratio quippe diametrorum a ratione radiorum diversa non est (§. 94.).

COROLLARIUM II.

354. *Arcus similes duorum circulorum sunt directe inter se, ut eorundem radii*. Sunt enim arcus similes, ut integræ peripheriæ (§. 289.).

THEOREMA XIV.

Circuli sunt in ratione duplicata suorum radiorum.

355. Sint duo circuli EBD, *ebd* (*fig*. 30, 31. *Tab*. II.) eorumque radii rectæ AB, *ab*. Dico, circulum EBD esse ad circulum *ebd* in ratione *duplicata* radii AB ad radium *ab*.

Demonstratio.

Circuli sunt polygona regularia ejusdem generis (§. 351.).

Hæc

Hæc autem sunt inter se in ratione *duplicata* suorum radiorum. (§. 347.). Ergo &c.

COROLLARIUM I.

356. *Circuli sunt in ratione duplicata suarum diametrorum.* Diametri namque circulorum sunt, ut eorundem radii (§. 94.)

COROLLARIUM II.

357. *Circuli sunt inter se, ut quadrata suorum radiorum, & diametrorum:* Sunt enim etiam hujusmodi quadrata in ratione *duplicata* suorum laterum (§. 345.); adeoque ipsorum radiorum, & diametrorum.

COROLLARIUM III.

358. *Tam semicirculi, quam sectores similes sunt in ratione duplicata radiorum; atque adeo, ut eorundem quadrata.* Semicirculi namque, & sectores similes sunt; ut integri circuli (§. 289.).

COROLLARIUM IV.

359. *Si fuerint tres rectæ continuo geometrice proportionales, circulus descriptus circa primam est ad circulum descriptum circa secundam, ut prima ad tertiam.* Ostenditur eodem modo, quo § 349. de *figuris planis rectilineis* idipsum demonstravimus.

COROLLARIUM V.

360. *Circulorum diametri, & semidiametri sunt in ratione ipsorum circulorum subduplicata* (§. 57.).

SE-

SECTIO QUARTA.

De solidis.

DEFINITIO I.

361. *Solidum*, sive *corpus Mathematicum*, *est magnitudo secundum trinam dimensionem extensa*, *una vel pluribus superficiebus terminata*. Sicuti ergo puncta sunt extrema linearum, & lineæ superficierum, ita superficies sunt extrema corporum.

DEFINITIO II.

362. *Angulus solidus dicitur ille, qui tribus ad minimum angulis planis a quatuor rectis, si simul sumantur, deficientibus; penes duo latera simul unitis, eorumque apicibus in eodem puncto consistentibus, continetur.* Sic solidus est angulus, quem in puncto *a* (*fig.*1. *Tab.*III.) constituunt tres anguli plani *bac*, *bad*, *dac*, minores quatuor rectis simul penes eorum latera uniti.

COROLLARIUM.

363. *Illi idcirco anguli solidi erunt inter se æquales, qui planis angulis numero, & magnitudine æqualibus, eodemque ordine dispositis, continentur.* Æquales nimirum erunt anguli solidi constituti ad puncta *a*, A (*fig.* 1. 2. *Tab.* III.) si non solum tres fuerint anguli plani, qui utrumque constituunt, verum etiam si ita illi sese habuerint, ut angulus *bac* sit æqualis angulo BAC, angulus *bad* angulo BAD, & angulus *dac* angulo DAC.

DEFINITIO III.

364. *Ille angulus solidus vocatur rectus, qui tribus rectis*

angu-

angulis planis comprehenditur. Hujusmodi est angulus constitutus in puncto *a* (*fig*. 3. *Tab*. III.) a tribus planis rectis angulis *eac*, *bac*, *bae*. *Angulus obtusus est ille, qui rectum superat*. *Acutus vero, qui a recto deficit*.

COROLLARIUM.

365. Hinc *omnes anguli solidi recti sunt inter se aequales*. Omnes enim continentur angulis planis numero, & magnitudine aequalibus.

DEFINITIO IV.

366. Ex solidis, quae planis superficiebus terminantur, illa dicuntur *regularia*, *quae planis regularibus*, & *aequalibus continentur*, *omnesque ipsorum anguli sunt inter se aequales*. Corpora regularia sunt *cubus*, *tetraedrum*, *octaedrum*, *dodecaedrum*, & *isocaedrum*. Verum inter omnia principem locum obtinet *sphaera*. Ceterae autem corpora ab his diversa, *irregularia* nuncupantur.

DEFINITIO V.

367. *Pyramis est solidum terminatum pluribus, quam duobus, triangulis planis rectilineis, ea ratione simul penes duo quaelibet ipsorum latera unitis, ut spatium undique claudant, eorum vertices in unum omnes punctum coeant, ipsorum vero bases figuram planam rectilineam constituant*. Tale est solidum BACD (*fig*. 2. *Tab*. III.), tribus quippe triangulis planis BAC, BAD, DAC continetur, quorum bases BC, BD, DC figuram planam BDC constituunt. Figura ipsa BDC *basis* pyramidis dicitur; *vertex* punctum A; *axis* vero recta ducta a *vertice* A in centrum *basis*. Si *axis* ad perpendiculum *basi* incumbat, pyramis *recta* vocatur; *inclinata* vero, si *axis* oblique ad *basim* se habeat. Ceterum *tot triangulis planis rectilineis quavis pyramis comprehenditur, quot latera in illius base numerantur*.

Hypo-

Hypothesis I.

368. Oriri concipitur pyramis ex parallela elevatione figuræ planæ rectilineæ continuo uniformiter decrescentis in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis. Ut si triangulum planum rectilineum BDC (*fig.* 2. *Tab.* III.) ita supra planum elevari intelligatur, ut in ejusmodi elevatione sibi semper parallelum existat, contiuuo uniformiter decrescat, & quidem in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, pyramis consurget BACD. *Demonstratur lib.* XI. *Elementorum* §. 95.

COROLLARIUM.

369. Hinc *consurgit pyramis ex tot planis rectilineis basi similibus, sibi mutuo atque basi parallelis, in ratione duplicata imminutæ altitudinis continuo uniformiter apicem versus decrescentibus, quot sunt puncta in illius altitudine*. Ut si in pyramide BACD determinentur plana elementaria *bdc*, *mxn*, hæc erunt similia, & parallela tum inter se, tum basi BDC, eritque basis BDC ad planum elementare *mxn* in ratione *duplicata* altitudinis AN totius pyramidis ad altitudinem A*y* respondentem elemento *mxn*. Similiter basis BDC erit ad planum elementare *bdc* in ratione *duplicata* altitudinis AN ad altitudinem A*z*. Hæc porro plana elementaria tot sunt, quot habentur puncta in altitudine AN, non considerato vertice A. Toties etiam debet sumi planum generans in ortu pyramidis, quot in altitudine puncta numerantur.

DEFINITIO VI.

370. *Prisma est solidum pluribus planis rectilineis comprehensum, quorum duo ex adverso æqualia sunt, similia, & parallela, reliqua vero sunt parallelogramma*. Hujusmodi est solidum *ae* (*fig.* 4 *Tab.* III.) quippe plana ex adverso posita *abc*, *def* æqualia sunt, similia, & parallela; reliqua vero

adcb

adeb, *befc*, *adfc* sunt parallelogramma. Clauditur idcirco *prisma* tot parallelogrammis, quot sunt latera in uno planorum, quæ sunt sibi ex adverso posita.

Hypothesis II.

371. Oritur prisma ex parallela elevatione figuræ planæ rectilineæ, quam elevationem altitudo ipsius prismatis metitur. Sic prisma *af* (*fig.* 4. *Tab.* III.) consurgit ex parallela elevatione plani rectilinei *def*, quam elevationem metitur altitudo *cx* ipsius prismatis.

COROLLARIUM.

372. Concipi idcirco potest *prisma* veluti compositum ex tot planis rectilineis, sibi mutuo impositis, adeoque inter se parallelis, similibus, & æqualibus, quot sunt puncta in illius altitudine. Quocirca potest *prisma* quodcunque assumi, veluti factum ex ductu basis in altitudinem. Ut si basis *def* prismatis *af* (*fig.* 4. *Tab.* III.) fuerit $= mn$, ejusque altitudo $cx = x$, prisma *af* erit $= mnx$. *Demonstrantur hæc omnia lib. XI. Elementorum* §. 74. *& seq.*

DEFINITIO VII.

373. *Parallelepipedum est solidum sex parallelogrammis comprehensum, quorum duo qualibet ex adverso similia sibi mutuo sunt, æqualia, & parallela*. Hujusmodi est solidum *bd* (*fig.* 3. *Tab.* II.).

COROLLARIUM.

374. Hinc *omne parallelepipedum est prisma, licet non omne prisma sit parallelepipedum*. Quippe in omni *parallepipedo* duo plana posita ex adverso sunt similia, æqualia, & parallela, prout *prisma* exigit. Verum, cum hæc in *parallelepipedo* debeant esse parallelogramma, quod non postulat *pris-*

prisma, non omne *prisma* est *parallelepipedum*.

DEFINITIO VIII.

375. *Cubus est solidum sex quadratis æqualibus, & quæ ex adverso sunt, sibi mutuo parallelis comprehensum.* Tale est solidum *acd* (*fig.6.Tab.* III.).

COROLLARIUM I.

376. Cum omnes anguli *cubi* sint recti (§. 364.), adeoque æquales inter se (§. 365.) *omnis cubus est solidum regulare* (§. 366.).

COROLLARIUM II.

377. *Omnis cubus est parallelepipedum*; at non vicissim *omne parallelepipedum est cubus*. Omni siquidem *cubo* convenit definitio *parallelepipedi*; at non e converso. *Cubus* itaque *est species prismatis* (§. 374.).

DEFINITIO IX.

378. *Conus est solidum contentum circulo, tamquam base & curva superficie ex una parte in punctum*, quod *coni apex* dicitur, *tota desinente*. Tale est solidum BAC (*fig.* 7. *T.* III.) *Axis porro coni est recta ducta ab illius apice, seu vertice in centrum basis*. Sic recta Aa est axis coni BAC, quæ si perpendicularis fuerit basi, *conus* dicitur *rectus*; si vero oblique ad basim se habuerit, *conus obliquus* nuncupatur.

DEFINITIO X.

379. *Cylindrus est solidum duobus circulis æqualibus, & parallelis, & curva superficie in illorum peripherias desinente comprehensum*. Hujusmodi est solidum *ad* (*fig.* 8. *T.* III.) Continetur enim duobus circulis æqualibus, & parallelis *ab*, *cd*,

&

& curva superficie *acd*. Recta porro *en* conjungens centra circulorum dicitur *axis coni*, quæ si ad perpendiculum basi institerit, *conus* vocatur *rectus*; *obliquus* vero, si fuerit inclinata.

DEFINITIO XI.

380. *Tetraedrum est solidum quatuor triangulis planis rectilineis regularibus, & inter se æqualibus terminatum*; ut solidum ABC (*fig.* 9. *Tab.* III.). *Octaedrum est solidum octo triangulis planis rectilineis regularibus, & inter se æqualibus comprehensum*, ut solidum DEF (*fig.* 10.). *Dodecaedrum est solidum, quod duodecim pentagonis æqualibus, & regularibus continetur*, ut solidum GHK (*fig.* 11.). *Icosaedrum* postremo *est solidum, quod viginti triangulis planis rectilineis, regularibus, & æqualibus comprehenditur*, ut solidum LMN (*fig.* 12.). Universaliter, *polyedrum vocatur illud solidum quod pluribus figuris planis rectilineis terminatur*. Est enim *polyedrum* in genere solidorum, quod est *polygonum* in genere planorum.

DEFINITIO XII.

381. *Sphæra est solidum una tantum curva superficie comprehensum, in cujus area punctum est, a quo omnes rectæ, quæ in illam curvam superficiem cadunt, sunt inter se æquales*. Hujusmodi est solidum *bcd* (*fig.* 13. *Tab.* III.) Æquales quippe sunt omnes rectæ *ab*, *ac*, *ad*, quæ a puncto *a* in curvam superficiem *bcd*, qua solidum ipsum continetur, duci possunt.

DEFINITIO XIII.

382. *Centrum sphæræ est illud punctum sumtum in area ipsius sphæræ, a quo omnes rectæ ductæ in ejusdem superficiem, sunt æquales*. *Radius, sive semidiameter sphæræ est quævis recta ducta a centro in superficiem*. *Diameter vero est recta transiens per sphæræ centrum, & utrinque ad illius superficiem terminata*. Si punctum *a* est *centrum* sphæræ *bcd* (*fig.* 13. *Tab.* III.); cum

rectæ

rectæ *ab*, *ac*, *ad* sint æquales. *Radius* est quælibet rectarum *ab*, *ac*, *ad*. *Diameter* vero est recta *bd*.

COROLLARIUM.

383. Hinc *omnes sphæræ radii æquales sunt inter se*, *sicuti etiam omnes ejusdem diametri*. Et quoniam centrum in medio sphæræ, ut patet, reperitur, *planum per sphæræ centrum transiens*, *eam in duas partes æquales dividit*, quæ *hemispheria* idcirco nuncupantur.

DEFINITIO XIV.

384. *Centrum polyedri regularis est punctum sumtum in illius area*, *a quo omnes rectæ ductæ ad singulos ipsius polyedri angulos*, *sunt æquales*. Sic punctum *a* est centrum *polyedri regularis* LMN (*fig.* 12. *Tab.* III.). Quippe omnes rectæ ductæ a puncto *a* ad singulos ipsius angulos *c*, *e*, *x*, *b* &c. sunt æquales. Cum enim cuilibet *polyedro regulari* sphæra circumscribi possit, cujus superficies per apices omnium angulorum ipsius *polyedri* simul transeat, manifeste apparet, ejusmodi punctum in quolibet *polyedro regulari* reperiri.

DEFINITIO XV.

385. *Radius polyedri regularis est recta quævis linea ducta ab illius centro ad apicem angulorum ipsius polyedri*. Sic recta *ab* est radius *polyedri regularis* LMN (*fig.* 12. *Tab.* III.).

DEFINITIO XVI.

386. *Solida similia dicuntur illa*, *quæ totidem ex æquo planis inter se æqualibus*, *sibique mutuo similibus continentur*. Sic duo prismata NBCD, *nbcd* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) similia sunt sibi mutuo; quia tot planis continetur prisma NBCD, quot prisma *nbcd* comprehenditur, & plana unius similia sunt

planis alterius, videlicet planum BCD plano *bcd*, planum ACDZ plano *acdz*, atque itaque ita de ceteris.

COROLLARIUM I.

387. Hinc *omnia corpora regularia*, nimirum *omnes cubi*, *omnia tetraedra, octaedra, dodecaedra, & icosaedra, sunt* respective *sibi mutuo similia*. Etenim planis numero æqualibus, & figura similibus, utpote regularibus, omnia *respective* continentur.

COROLLARIUM II.

388. *Quolibet latus solidi regularis est homologum cuilibet lateri alterius solidi regularis ejusdem generis*. Omnia enim solida regularia planis regularibus continentur; & singula latera unius figuræ rectilineæ regularis sunt homologa singulis lateribus alterius figuræ ejusdem generis (§. 287.).

DEFINITIO XVII.

389. *Duo cylindri*, sicuti etiam *duo coni*, *dicuntur similes*; *quorum axes eandem ad circulos basium inclinationem habent, eandem vero rationem ad eorundem circulorum radios*. Ut si eadem fuerit inclinatio axium AN, *an* cylindrorum DC, *dc* (*fig.* 16. 17. *Tab.* III.) ad circulos basium BC, *bc*, videlicet si anguli ANC, *anc* fuerint æquales; sique ratio axis AN ad radium NC circuli baseos BC diversa ab ea non fuerit, quam habet axis *an* ad radium *nc* circuli baseos *bc*, duo cylindri DC, *dc* dicentur *similes*. Idipsum intellige de conis BAC, *bac*.

AXIOMA.

390. *Illæ magnitudines sunt æquales, quarum elementa sunt numero, & quantitate* respective *inter se æqualia*.

LEM-

LEMMA I.

Cylindrus est prisma infinitorum laterum.

391. Spectetur prisma *me* (*fig.* 18. *Tab.* III.), cujus basis *abcde* sit polygonum regulare. Evidens est, multiplicari non posse latera polygoni baseos, eodem manente perimetro, quin itidem multiplicentur parallelogramma, quibus prisma *me* continetur; ut proinde, si latera baseos sint infinita, & infinite parva, parallelogramma itidem, quibus prisma continetur, evadant numero infinita, & infinitæ parvæ latitudinis. Constat autem, latera polygoni *abcde* in infinitum multiplicari non posse, quin illius perimeter in peripheriam circuli *xz* abeat. Ergo neque parallelogramma, quibus terminatur prisma *me*, in infinitum multiplicari queunt, eorumque latitudo in infinitum decrescere, quin prismatis superficies abeat itidem in curvam superficiem cylindri *mxz*; atque adeo quin prisma in cylindrum mutetur. Ergo cylindrus non differt a prismate infinitorum laterum.

COROLLARIUM I.

392. *Cylindrica idcirco superficies assumi potest, veluti composita ex infinitis parallelogrammis infinitæ parvæ latitudinis, penes duo ipsorum latera simul unitis.*

COROLLARIUM II.

393. *Cylindri similes considerari possunt veluti species prismatum similium.*

LEMMA II.

Conus est pyramis infinitorum laterum.

394. Haud dissimilis est a præcedenti. Sicuti namque po-

lygonum regulare *bcd* (*fig.* 19. *Tab.* III.) ſive baſis pyramidis *bad*, abit in peripheriam circuli, ſi in infinitum multiplicentur ipſius latera, ita ſuperficies pyramidis abit tunc in curvam ſuperficiem coni; ac proinde ipſa pyramis in conum tranſit, ſeu a cono nullatenus diſcerni poteſt; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

395. *Conſiderari propterea poteſt ſuperficies coni veluti compoſita ex infinitis triangulis, baſim infinite parvam habentibus, penes duo ipſorum latera ſimul unitis.*

COROLLARIUM II.

396. *Coni ſimiles ſumi, atque ſpectari queunt, veluti ſpecies pyramidum ſimilium.*

THEOREMA I.

Pyramides æqualium baſium, & altitudinum ſunt æquales.

397. Æquales ſint baſes *bdc*, BDC (*fig.* 1. 2. *Tab.* III.), ſicuti etiam altitudines *an*, AN pyramidum *abd*, ABD. Dico, ipſas quoque pyramides eſſe æquales.

Demonſtratio.

Enimvero, cum altitudines *an*, AN ſint æquales, elementa utriuſque pyramidis erunt numero æqualia (§. 369). Æqualia ſunt autem etiam magnitudine, ſi *reſpective* ſumantur. Nam ſpectentur duo elementa MAP, *mxn* ad æqualem altitudinem A*y*. Cum igitur elementa pyramidis decreſcant in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis (§. 368) baſis *bdc* pyramidis *adc* erit ad elementum MAP, ut baſis BDC pyramidis ABD ad elementum *mxn*, quod ſcilicet utrumque antecedens ſit ad ſuum conſequens in ratione *duplicata* altitudinis AN, ſive *an*, ad altitudinem A*y*, ſive *ay*.

Ba.

Bases autem *bdc*, BDC positæ sunt æquales. Ergo etiam ipsa elemeuta MAP, *mxn* erunt æqualia (§.70.). Igitur duæ pyramides *abd*, ABD sunt æquales (§. 390.).

COROLLARIUM.

398. *Coni æqualium basium, & altitudinum sunt æquales*: Conus enim est species pyramidis (§. 394.).

THEOREMA II.

Omnis pyramis est tertia pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis.

I.

399. Spectetur primo prisma BE (*fig.* 20. *Tab.* III.) trilateram habens basim DEF, sitque basis *def* pyramidis *ae* (*fig.*21.*Tab.* III.) æqualis basi DEF ipsius prismatis, & eadem utriusque altitudo *ab*. Dico, pyramidem *ae* esse tertiam partem prismatis BE.

Demonstratio.

Prisma BE secetur plano transeunte per punctum A, & per puncta D, F, sive per latus DF basis DEF. Habebitur pyramis DAFE, quæ, utpote æqualem cum pyramide *adf* habens basim, & altitudinem, erit ipsi pyramidi *adf* æqualis (§. 397). Residuum vero solidum secetur plano transeunte per latus BA plani BAC, & per punctum F. Itaque prisma BE divisum erit in tres pyramides DAFE, FBAC, DABF; quæ sunt omnes inter se æquales. Enimvero, cum diagonalis BF dividat parallelogrammum BDFC in duo triangula æqualia DBF, BFC (§. 227), pyramides FBAC, DABF habebunt æquales bases. Habent autem etiam æqualem altitudinem; cum altitudo utriusque non differat a recta ducta a vertice A in planum BDFC. Ergo

duæ iſtæ pyramides ſunt æquales (§. 397). Rurſus, cum plana terminantia DEF, BAC ſint æqualia (§. 370), pyramides DAFE, BFAC habebunt æquales baſes. Æquales ſunt autem etiam ipſarum altitudines, rectæ nimirum AE, CF. Ergo etiam duæ pyramides DAFE, BFAC ſunt æquales (§. 397.); ac proinde æquales ſunt tres pyramides DAFE, FBC, DABF (§. 24.). Oſtenſum eſt autem, pyramidem *adef* æquare pyramidem DAFE. Ergo pyramis *adef* eſt tertia pars priſmatis BE.

II.

400. Sit modo priſma BN (*fig.* 22. *Tab.* III.) pentagonam habens baſim MNRPF, quæ ſimilis ſit, & æqualis baſi *dabce* pyramidis *cad* (*fig.* 23. *Tab.* III.) ejuſdem altitudinis. Dico, pyramidem *cad* eſſe tertiam partem priſmatis BN.

Demonſtratio.

Cum plana AEDB, MNRF ſimilia ſint, æqualia, & parallela (§. 370.), priſma BN ſectum erit planis BENF, CEMP in tria priſmata. Similiter ſecta pyramide plano tranſeunte per verticem *a*, & per puncta *b*, *e*, & plano tranſeunte per verticem *a*, & per puncta *e*, *n*, tres habebuntur pyramides, quarum *caeb* erit tertia pars priſmatis BENFMA, pyramis *baen* erit tertia pars priſmatis BFNECP, & pyramis *eand* tertia pars priſmatis CENPRD (§. 399.), ob *reſpectivam* ſcilicet æqualitatem baſium, & altitudinum. Ergo tota pyramis *cae* eſt tertia pars totius priſmatis BN (§. 101.); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

401. Cum cylindrus ſit ſpecies priſmatis (§. 391.); & conus ſpecies pyramidis (§. 394.), *omnis conus erit tertia pars cylindri ejuſdem baſis, & altitudinis*.

Co-

COROLLARIUM II.

402. *Pyramides sunt directe inter se, ut prismata æqualis basis, & altitudinis*. Nimirum pyramis BADC (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) est ad pyramidem *badc*, ut prisma NC ad prisma *nc* (§. 94.).

COROLLARIUM III.

403. Haud dissimili ratione etiam *coni* BAC, *bac sunt directe, ut cylindri* DC, *dc æquales bases respective cum illis habentes, & altitudines* (*fig.* 16. 17. *Tab.* III.).

THEOREMA III.

Prismata æqualium basium & altitudinum sunt æqualia.

404. Sint duo prismata *ae*, AE, (*fig.* 4. 5. *Tab.* III.) quarum bases *def*, DEF æquales sint inter se, sicuti etiam altitudines *cz*, CZ. Dico, ipsa prismata esse æqualia.

Demonstratio.

Cum enim prisma *ae* consurgat ex ductu basis *def* in altitudinem *cz*, & prisma AE ex ductu basis DEF in altitudinem CZ (§. 372.), nequeunt bases, & altitudines esse *respective* inter se æquales, quin ipsa itidem producta, sive prismata, sint æqualia (§. 68.).

COROLLARIUM.

405. *Cylindri æqualium basium & altitudinum sunt æquales.* Sunt enim species prismatum (§. 391.).

THEOREMA IV.

Prismata æqualium altitudinum sunt, ut bases; & quæ habent æquales bases, sunt, ut altitudines.

I.

406. Sint duo prismata *ae*, AE (*fig.* 4. 5. *Tab.*III.) æqualium altitudinum. Dico, prisma *ae* esse ad prisma AE, ut est basis *def* ad basim DEF.

Demonstratio.

Ponatur basis *def* = *xr*, & basis DEF = *yu*, altitudo vero *cz*, adeoque etiam CZ, = *m*. Erit ergo prisma *ae* = *xrm*, & prisma AE = *yum* (§. 372.). Est autem *xrm* . *yum* = *xr* . *yu* (§. 77). Ergo etiam prisma *ae* erit ad prisma AE, ut *xr* ad *yu*, nimirum ut bases.

II.

407. Vicissim vero æquales sint bases prismatum *ae*, AE: Dico, prisma *ae* esse ad prisma AE, ut est altitudo *cz* ad altitudinem CZ.

Demonstratio.

Eadem est cum præcedenti.

COROLLARIUM I.

408. *Pyramides æque altæ sunt directe, ut bases; & quæ habent bases æquales, sunt, ut altitudines* (§. 402).

COROLLARIUM II.

409. *Cylindri æqualium altitudinum sunt, ut bases; & qui ha-*

habent æquales bases sunt, ut altitudines (§. 391.).

COROLLARIUM III.

410. *Coni æque alti sunt directe, ut circuli basium*, & vicissim *coni æqualium basium, sunt, ut altitudines* (§. 403).

THEOREMA V.

Prismata inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

411. Super inæquales bases BCD, *bcd*, & sub inæqualibus altitudinibus MX, *mx* constituta sint duo prismata MBC, *mbc* (*fig.* 14. 15. *Tab.*III.). Dico, prisma MBC esse ad prisma *mbc* in ratione composita ex ratione basis BCD ad basim *bcd*, & ex ratione altitudinis MX ad altitudinem *mx*.

Demonstratio.

Facta namque hypothesi, ut sit basis BCD $=pr$, basis $bcd=qy$, altitudo MX $=n$, & altitudo $mx=u$, erit prisma MBC $=prn$, & prisma $mbc=qyu$ (§. 372). Productum autem prn est ad productum qyu in ratione composita ex ratione magnitudinis pr ad magnitudinum qy, & ex ratione magnitudinis n ad magnitudinem u (§. 107). Ergo in eadem ratione erunt etiam ipsa prismata; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

412. *Pyramides inæqualium basium & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum* (§. 402).

COROLLARIUM II.

413. *Cylindri inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum* (§. 391).

Co-

COROLLARIUM III.

414. *Coni inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum* (§. 403.).

THEOREMA VI.

Prismata reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æqualia.

415. Basis CBD (*fig.* 24. 25. *Tab.* III.) prismatis AC sit ad basim *cbd* prismatis *ac reciproce*, ut altitudo *ab* ad altitudinem AB. Dico, prismata AC, *ac* esse æqualia.

Demonstratio.

Ponatur basis CBD $= pr$, basis $cbd = qz$, altitudo $ab = x$, & altitudo AB $= y$. Cum igitur ex hypothesi habeatur $pr.qz = x.y$, erit $pry = qzx$ (§. 73.). Prisma autem AC adæquat productum pry, & prisma *ac* productum qzx (§. 372). Ergo erit AC $= ac$ (§. 24.).

COROLLARIUM I.

416. *Pyramides reciprocantes sibi mutuo bases, & altitudines; sunt æquales* (§. 402.).

COROLLARIUM II.

417. *Cylindri, qui reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æquales* (§. 391.).

COROLLARIUM III.

418. *Coni reciprocantes sibi mutuo bases, & altitudines sunt æquales* (§. 403.).

SCHO-

SCHOLION.

419. Cum parallelepipedum ſit ſpecies priſmatis (§. 374), quæ de priſmatibus modo oſtenſa ſunt, ſequitur aperte, ea omnia etiam parellelepipedis convenire.

THEOREMA VII.

Omnia latera homologa planorum, quibus ſimilia ſolida terminantur, eandem inter ſe rationem habent.

420. Sint duo ſolida ſimilia DC, *dc* (*fig.* 26. 27. *Tab.* III.) Latera autem homologa planorum, quibus continentur, ſint DB, *db*, BE, *be*, BC, *bc* &c. Dico, horum omnium eandem eſſe rationem.

Demonſtratio.

Cum enim ſit BD. *bd* = BN. *bn* (§. 320), & idem latus BN ſit commune duobus planis EBN, NBD, ſitque BE. *be* = BN. *bn* (§. 320), erit quoque BD. *bd* = BE. *be* (§. 25), & eadem ratione etiam BD. *bd* = BC. *bc*, atque ita de ceteris. Ergo &c.

THEOREMA VIII.

Altitudines priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint duo plana ipſorum ſimilia, ſunt ut duo quælibet homologa baſium latera.

I.

421. Super plana ſimilia BCD, *bcd* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) veluti baſes, habeantur duo priſmata ſimilia NC, *nc* illis ad perpendiculum inſiſtentia, & duo itidem ſimilia ad ipſas baſes ſimiliter inclinata MC, *mc*, quorum altitudines ſint rectæ MX, *mx*. Dico, horum priſmatum altitudines eſſe

esse *directe* inter se, ut duo quælibet homologa latera CD, *cd* basium BCD, *bcd*.

Demonstratio.

Cum altitudines prismatum NC, *nc* basibus ad perpendiculum insistentium non differant a lateribus homologa ZD, *zd* planorum similium ACDZ, *acdz*; sintque lateris ZD, *zd* *directe*, ut latera CD, *cd* (§. 420.), remanet, altitudines prismatum NC, *nc* esse *directe*, ut latera CD, *cd*. Quoniam vero altitudines MX, *mx* prismatum inclinatorum MC, *mc* adæquant latera homologa ZD, *zd* prismatum similium NC, *nc* ad perpendiculum super easdem bases erectorum, sicuti, ut modo ostensum est, habetur ZD. *zd* == CD. *cd*, ita habebitur etiam MX. *mx* == CD. *cd*; adeoque &c.

II.

422. Sint duæ pyramides similes BEDC, *bedc* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) quarum bases sunt plana similia BCD. *bcd*. Dico, earum altitudines MX, *mx* esse directe, ut latera homologa CD, *cd* basium.

Demonstratio.

Erectis enim super easdem bases, sub iisdem altitudinibus, duobus prismatibus similibus MC. *mc*, evidens est, altitudines MX, *mx*, si referantur ad prismata ipsa MC, *mc*, esse, ut latera homologa CD, *cd* basium earundem BCD, *bcd* (§. 420). Ergo hæc itidem est earundem altitudinum ratio, si ad pyramides BEDC, *bedc* altitudines ipsæ referantur.

COROLLARIUM I.

423. Cum plana similia BCD. *bcd* sint in ratione *duplicata* laterum homologorum CD, *cd* (§. 342.), *bases prismatum*,

tum, & pyramidum similium, si sint plana eorundem similia, erunt in ratione duplicata altitudinum.

COROLLARIUM II.

424. *Altitudines prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint plana similia, sunt directe, ut perimetri basium.* Altitudines nimirum MX, *mx* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) tam prismatum MC, *mc*, quam pyramidum BEDC, *bedc* similium, sunt *directe* inter se, ut perimetri basium BCD, *bcd*. Sunt enim perimetri BCD, *bcd*, ut duo latera eorundem homologa CD, *cd* (§. 339).

COROLLARIUM III.

425. Hinc, quoniam cylindri similes sunt species prismatum similium (§. 393), & coni similes sunt species pyramidum similium (§. 396), *altirudines tam cylindrorum, quam conorum similium erunt directe inter se, ut peripheriæ circulorum basis*; cumque peripheriæ sint, ut radii (§. 352), *altitudines horum solidorum erunt itidem directe inter se, ut radii circulorum basis.*

Hypothesis III.

426. *Si ex centro polyedrorum regularium ejusdem generis ad singulos ipsorum angulos ducantur radii, in totidem ex æquo pyramides sibi mutuo similes ipsa polyedra divisa erunt.* Ut si planum BCD (*fig.* 1. 2. *Tab.* IV.) fuerit unum ex illis, quibus terminatur polyedrum regulare EB, & planum *bcd* unum ex illis, quibus polyedrum regulare *eb* ejusdem generis comprehenditur, ductis a centro A ad angulos B, C, D radiis AB, AC, AD, & a centro *a* ad angulos *b*, *c*, *d* radiis *ab*, *ac*, *ad*, pyramis BADC erit similis pyramidi *badc*. Idipsum dicito de ceteris pyramidibus, quæ super alia plana eodem modo determinantur. *Demonstratur lib.* XIII. *Elemen-*

mentorum §. 97. Verum colligi satis id etiam posse videtur ex §. 337. Sicuti enim duo quælibet polygona regularia ejusdem generis, radix ex ipsorum centro ad singulos eorundem angulos ductis, resolvuntur in totidem ex æquo similia triangula, quot sunt ipsorum latera, ita duo polyedra regularia ejusdem generis videntur debere resolvi in totidem ex æquo pyramides similes, quod sunt ipsorum plana terminantia, si ex eorum itidem centro ad singulos angulos rectæ ducantur. Est enim polyedrum regulare inter figuras solidas, quod est regulare polygonum inter planas. Hinc

COROLLARIUM.

427. *Radii polyedrorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut duo quælibet latera homologa planorum, quibus terminantur*. Sic radii AB, *ab* polyedrorum regularium ejusdem generis EB, *eb* (*fig.* 1. 2. *Tab.* IV.) sunt *directe*, ut duo latera homologa BD, *bd* terminantium planorum BCD, *bcd*. Etenim, cum tam radii AB, *ab*, quam rectæ BD, *bd* sint latera homologa pyramidum similium BADC, *badc*, erit AB.*ab* = BD.*bd* (§. 420).

THEOREMA IX.

Superficies omnium solidorum similium, quæ planis rectilineis terminantur, sunt in ratione duplicata duorum homologorum eorundem laterum.

428. Sint duo solida DC, *dc* similia (*fig.* 26. 27. *Tab.* III.) planis rectilineis terminata. Dico, superficiem solidi DC esse ad superficiem solidi *de* in ratione *duplicata* lateris BC ad latus homologum *bc*.

Demonstratio.

Cum omnia plana similia, quibus ipsa solida continentur, sint

sint ratione *duplicata* suorum laterum homologorum (§.342) eademque sit ratio omnium laterum homologorum solidorum similium (§.420.) duo quælibet plana similia solidorum DC, *dc* erunt in ratione *duplicata* laterum homologorum BC, *bc*. Igitur etiam summa planorum terminantium solidum DC, sive tota superficies ipsius solidi DC, erit ad summam omnium planorum terminantium solidum *dc*, seu ad totam superficiem ipsius solidi *dc*, in ratione *duplicata* lateris BC ad latus homologum *bc* (§.101.).

COROLLARIUM I.

429. *Superficies solidorum similium, quæ planis terminantur, sunt directe inter se, ut quadrata duorum quorumcunque laterum homologorum*. Nimirum superficies solidi DC est ad superficiem solidi *dc*, ut quadratum lateris CB ad quadratum lateris homologi *cb*. Sunt enim etiam hujusmodi quadrata in ratione *duplicata* ipsorum laterum CB, *cb* (§.345.).

COROLLARIUM II.

430. *Superficies prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint plana similia, sunt in ratione duplicata suarum altitudinum*. Horum namque altitudines sunt *directe* inter se, ut duo quælibet homologa ipsorum latera (§§.421. 422.).

COROLLARIUM III.

431. Hinc, cum cylindri similes sint species prismatum similium (§.393.), & similes coni sint species similium pyramidum (§.396.), *curvæ tam cylindrorum, quam conorum similium superficies sunt* respective *inter se in ratione duplicata suarum altitudinum*; atque hinc

COROLLARIUM IV.

432. Cum altitudines cylindrorum, & conorum similium

sint,

sint, ut radii circulorum basis (§. 425), *curvæ superficies cylindrorum, & conorum similium sunt* respective *in raatione duplicata radiorum circulorum basis*; ac proinde, *ut ipsorum radiorum quadrata* (§. 357); nec non, *ut ipsi basium circuli* (§. 355)

SCHOLION.

433. Cum circuli, quibus similes cylindri terminantur, quique sunt similium conorum bases, sint in ratione *duplicata* suorum radiorum (§. 355), *curvæ similium cylindrorum, atque conorum superficies, sumtæ una cum eorundem circulis, sunt in ratione radiorum circulorum basis duplicata*.

COROLLARIUM V.

434. *Superficies polyedrorum regularium ejusdem generis sunt in ratione duplicata suorum radiorum*. Nimirum superficies polyedri regularis DC est ad superficiem polyedri regularis ejusdem generis *dc* (*fig.* 26. 27 *Tab.* III.) in ratione *duplicata* radii AB ad radium *ab*. Hujusmodi namque polyedra sunt solida similia (§. 387), eorumque radii sunt *directe* inter se ut duo quælibet homologa ipsorum latera (§. 427.).

COROLLARIUM VI.

435. *Superficies* idcirco *polyedrorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut suorum radiorum quadrata* (§ 345.).

COROLLARIUM VII.

436. Vicissim vero *altitudines prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint plana similia; sicuti etiam altitudines similium cylindrorum, & conorum; radii quoque circulorum basis eorundem; nec non radii polyedrorum regularium ejusdem generis, sunt inter se in ratione* subduplicata *superficierum ipsorum solidorum* respective (§. 57.)

THEO-

THEOREMA X.

Prismata similia sunt in ratione triplicata suorum laterum homologorum.

437. Sint duo prismata similia MBC, *mbc* (*fig.* 14. 15. *T.* III.) quorum bases sint plana similia BCD, *bcd*, & altitudines rectæ MX, *mx*. Dico prisma MBC esse ad prisma *mbc* in ratione *triplicata* lateris CD ad latus homologum *cd*.

Demonstratio.

Prismata MBC, *mbc* sunt inter se in ratione composita ex ratione basium BCD, *bcd*, & ex ratione altitudinum MX, *mx* (§. 411.). Bases autem BCD, *bcd* sunt in ratione *duplicata* laterum CD, *cd* (§. 342.); & altitudines MX, *mx* sunt *directe*, ut ipsa latera CD, *cd* (§. 421.). Ergo prisma MBC est ad prisma *mbc* in ratione composita ex ratione laterum CD, *cd*, & ex eadem *duplicata* Hæc autem est ratio ipsorum laterum CD, *cd triplicata* (§ 54.). Ergo prismata MBC, *mbc* sunt in ratione *triplicata* homologorum laterum CD, *cd*, adeoque &c.

COROLLARIUM I.

438. *Cubi sunt in ratione triplicata suorum laterum.* Cum enim cubus sit species prismatis (§. 377.), & omnes cubi sint solida similia (§ 387.), omnes cubi erunt similia prismata, & quidem hujusmodi, ut quodlibet latus unius sit homologum cuilibet lateri alterius (§. 388.): adeoque &c.

COROLLARIUM II.

439. *Prismata similia, quorum bases sint plana ipsorum similia, sunt in ratione triplicata suarum altitudinum.* Altitudines namque horum prismatum sunt, ut duo quælibet latera ipsorum homologa (§. 421.).

COROLLARIUM III.

440. *Pyramides similes, quarum bases sint plana ipsarum similia, sunt in ratione triplicata tum laterum homologorum, tum altitudinum.* Pyramides quippe sunt *directe* inter se, ut prismata super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§.402.), atque adeo pyramides similes sunt, ut prismata similia, ac proinde &c.

COROLLARIUM IV.

441. Cum cylindri similes sint species prismatum similium (§. 393.), & similes coni sint species pyramidum similium (§. 396.), *tam cylindri, quam coni similes sunt in ratione triplicata suarum altitudinum.*

COROLLARIUM V.

442. Cumque altitudines tam cylindrorum, quam conorum similium sint *directe* inter se, ut radii circulorum basis (§.425.), *tam cylindri, quam coni similes sunt directe inter se in ratione ipsorum radiorum triplicata*, atque hinc, *ut cubi tam ipsorum radiorum, quam suarum altitudinum* (§. 438.).

COROLLARIUM VI.

443. *Si ratio laterum duorum cuborum continuetur usque ad quartum terminum, cubus erit ad cubum, ut illius latus ad quartum terminum.* Nimirum, positis quatuor rectis continuo geometrice propotionalibus AB, CD, E, F (*fig.* 3. 4. *Tab.* IV.) cubus MA primæ AB erit ad cubum NC secundæ CD, ut prima AB ad quartam F. Prima namque AB est ad quartam F in ratione *triplicata* ipsius primæ AB ad secundam CD (§. 109), quæ est etiam ratio ipsorum cuborum (§. 438).

SCHO-

SCHOLION.

444. Vides propterea, solutionem problematis de *duplicatione cubi*, quod adeo torsit Priscorum ingenia, ab inventione *duarum mediarum continuo proportionalium* unice dependere.

COROLLARIUM VII.

445. *Latera homologa prismatum, & pyramidum similium; altitudines quoque ipsorum, sicuti etiam conorum, & cylindrorum similium, nec non radii circulorum basis eorundem, sunt* respective *inter se in ratione ipsorum subtriplicatæ* (§. 57).

Hypothesis IV.

446. *Polyedra similia in totidem ex æquo pyramides similes, quarum bases sint ipsorum plana terminantia, resolvi possunt.* Demonst. *lib.* XIII. *Elem.* § 91. Ceterum haud obscure id etiam colligitur ex §. 341. Cum enim polyedrum sit inter figuras solidas, quod est polygonum inter planas, quemadmodum duo quælibet polygona similia resolvi possunt in tot similia triangula, quot sunt ipsorum latera, ita duo quælibet similia polyedra videntur resolubilia in tot similes pyramides, quot sunt plana, quibus polyedra ipsa terminantur.

THEOREMA XI.

Polyedra similia sunt in ratione triplicata suorum laterum homologorum.

447. Sint duo polyedra similia EB, *eb* (*fig.* 1. 2. *Tab.* IV.). Dico, polyedrum EB esse ad polyedrum *eb* in ratione *triplicata* lateris BD ad latus homologum *bd*.

Demonstratio.

Pyramis BADC sit una ex illis, ex quibus componitur polyedrum EB, & pyramis *badc* una ex illis, ex quibus componitur polyedrum *eb*; sintque pyramides ipsæ similes inter se. Erit ergo pyramis BADC ad pyramidem *badc* in ratione *triplicata* lateris BD ad latus homologum *bd* (§.440.). Duæ autem quælibet pyramides similes, in quas polyedra ipsa resolvi possunt, hanc eandem habent rationem inter se; eademque est ratio omnium laterum homologorum in polyedris similibus (§.420.). Ergo summa omnium pyramidum constituentium polyedrum EB erit ad summam earum omnium, quæ polyedrum *eb* constituunt, sive soliditas polyedri EB erit ad soliditatem polyedri *eb*, ut illarum una BADC ad unam *badc* (§. 101.); atque adeo in ratione *triplicata* lateris BD ad latus homologum *bd*; ac proinde &c.

COROLLARIUM I.

448. *Polyedra regularia ejusdem generis sunt in ratione triplicata suorum laterum.* Sunt enim similia (§.387.), & quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius (§. 388.). Hinc

COROLLARIUM II.

449. Cum ratio radiorum in polyedris regularibus ejusdem generis non sit diversa a ratione laterum eorundem (§. 427.), *polyedra regularia ejusdem generis sunt in ratione suorum radiorum triplicata; atque adeo, ut eorundem cubi* (§.438.).

COROLLARIUM III.

450. Hinc vicissim *latera homologa polyedrorum similium, & radii polyedrorum regularium ejusdem generis, sunt in ratione ipsorum subtriplicata* (§. 57.)

LEM-

LEMMA III.

Sphæra est polyedrum regulare infinitis planis, magnitudine infinite parvis comprehensum.

451. Manifeste siquidem constat, polyedrum magis ad sphæram accedere, quo numero plura, & magnitudine exiliora sint plana, quibus continetur; ut proinde polyedrum infinitis numero, planis, magnitudine infinite parvis comprehensum, nullatenus a sphæra discerni queat. Ergo sphæra merito optimoque jure spectari atque assumi potest, veluti species polyedri regularis.

COROLLARIUM.

452. *Omnes idcirco sphæræ sunt polyedra regularia ejusdem generis; ac proinde sunt omnes sibi mutuo similes* (§. 387.).

THEOREMA XII.

Sphærarum superficies sunt in ratione duplicata suorum radiorum.

453. Rectæ AB, *ab* (*fig.* 5. 6. *Tab.* IV.) sint radii sphærarum CB, *cb*. Dico, superficiem sphæræ CB esse ad superficiem sphæræ *cb* in ratione *duplicata* radii AB ad radium *ab*.

Demonstratio.

Sphæræ CB, *cb* sunt polyedra regularia ejusdem generis (§. 452.). Ergo earum superficies sunt in ratione radiorum AB, *ab duplicata* (§. 434.).

COROLLARIUM I.

454. *Sphærarum superficies sunt in duplicata ratione diametrorum*. Diametri namque sunt *directe* inter se, ut radii (§. 94).

COROLLARIUM II.

455. *Sphærarum superficies sunt directe inter se, ut quadrata suorum radiorum.* Superficies nimirum sphæræ CB est ad superficiem sphæræ *cb*, ut quadratum AD radii AB ad quadratum *ad* radii *ab*. Sunt enim & ipsa quadrata in ratione radiorum AB, *ab* *duplicata* (§. 345.). Eadem ratione *superficies sphærarum sunt, ut diametrorum quadrata.*

COROLLARIUM III.

456. *Sphærarum diametri, & semidiametri sunt in ratione subduplicata superficierum earundem* (§. 57.).

THEOREMA XIII.

Sphæræ sunt in ratione triplicata suorum radiorum.

457. Spectentur sphæræ CB, *cb* (*fig.* 5. 6. *Tab.* IV.), quarum radii sint rectæ AB, *ab*. Dico, sphæram CB esse ad sphæram *cb* in ratione *triplicata* radii AB ad *radium ab*.

Demonstratio.

Cum enim sphæræ CB, *cb* sint polyedra regularia ejusdem generis (§. 452.), erunt & ipsæ in ratione suorum radiorum AB, *ab triplicata* (§. 449.).

COROLLARIUM I.

458. Quoniam diametrorum ratio diversa non est a ratione radiorum (§. 94.), *erunt sphæræ in ratione suarum etiam diametrorum triplicata.*

COROLLARIUM II.

459. Quamobrem, *si ratio radiorum, vel diametrorum duarum*

rum sphærarum continuetur usque ad quartum terminum, sphæra erit ad sphæram, ut illorum primus ad quartum. Vide, quæ diximus §. 443.

COROLLARIUM III.

460. Cum cubi sint in ratione *triplicata* suorum laterum (§. 438.), *sphæræ erunt inter se, ut cubi suorum radiorum, & diametrorum.*

COROLLARIUM IV.

461. *Sphærarum diametri & semidiametri sunt in ratione ipsarum sphærarum subtriplicata* (§. 57.). Ex ratione namque tam diametrorum, quam semidiametrorum ducta in seipsam *duplicatam*; ratio ipsarum sphærarum emergit.

SECTIO QUINTA.

De circulis sphæræ.

DEFINITIO I.

462. *Axis sphæræ est recta linea per sphæræ centrum transiens & utrinque ad illius superficiem terminata, circa quam omnino immobilem sphæra ipsa rotatur.* Ut si sphæra ACBD (*fig. 7. Tab. IV.*) concipiatur revolvi circa rectam AB per illius centrum ductam, utrinque ad ejusdem superficiem terminatam, & plane immobilem, recta AB erit axis sphæræ ACBD.

COROLLARIUM.

563. *Axis itaque sphæræ est una ex illius diametris* (§. 382.)

DEFINITIO II.

464. *Poli sive cardines sphæræ sunt puncta extrema axis,*

atque adeo ad motum sphæræ circum axim plane immobilia. Ut si recta AB (*fig.* 7. *Tab.* IV.) fuerit *axis* sphæræ ACBD, illius *poli* erunt duo puncta A, B.

DEFINITIO III.

465. *Circulus sphæræ vocatur ille, cujus peripheria in sphæræ superficie reperitur, eamque circumambit.* Hujusmodi in sphæra ACBD est circulus CeD (*fig.* 7. *Tab.* IV.).

DEFINITIO IV.

466. *Axis circuli sphæræ est recta linea per centrum ipsius circuli transiens, illius plano ad perpendiculum incumbens, atque ad sphæræ superficiem terminata.* Sic recta AB est axis circuli CeD in sphæra ACBD (*fig.* 7. *Tab.* IV.) Transit quippe per illius centrum *a*, ejusdem plano ad perpendiculum incumbit, & utrinque in sphæræ superficiem desinit. Dicitur autem *axis*; quia circa illam immobilem circulus ipse rotari concipitur.

SCHOLION.

467. Recta AB dicitur insistere plano circuli CeD ad perpendiculum, si fuerit perpendicularis omnibus rectis *a*C, *ae*, *a*D ductis ex puncto *a*, per quod illa transit, in plano CeD ipsius circuli.

DEFINITIO V.

468. *Poli circuli in sphæra sunt extrema puncta axis ipsius circuli.* Ut si recta AB fuerit *axis* circuli CeD in sphæra ACBD (*fig.* 7. *Tab.* IV.), illius *poli* erunt puncta extrema A, B.

COROLLARIUM I.

469. Hinc *circulorum in sphæra, quorum idem est axis iidem* quo-

quoque sunt poli; & vicissim, *quorum iidem sunt poli*, *idem pariter est axis*.

COROLLARIUM II.

470. *Si axis sphæræ fuerit axis circuli in ipsa sphæra descripti, illius itidem poli erunt poli ipsius circuli*. Similiter, *si poli sphæræ fuerint poli etiam circuli in ea positi, idem quoque erit utriusque axis*.

DEFINITIO VI.

471. *Distantia circuli in sphæra a suis polis est arcus circuli per illius polos transeuntis, inter polum & circuli peripheriam comprehensus*. Ut si *poli* circuli *abc* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) in sphæra Ad*Bf* fuerint puncta A, B, ducto per utrumque *polum* circulo A*e*B, arcus A*b* determinabit distantiam ipsius circuli *abc* a *polo* A, & arcus *be*B distantiam definiet ejusdem circuli a *polo* B.

SCHOLION.

472. Tot ergo *graduum* & *minutorum* erit distantia circuli *abc* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) a suo *polo* A, quot *gradus* & *minuta* in arcu A*b* continentur. Æqualiter quoque distabit circulus hinc inde a suis *polis*, si arcus, ex quibus ejusmodi distantia desumitur, fuerint æquales. Ut si puncta A, B fuerint *poli* circuli C*e*D (*fig.* 7. *Tab.* IV.), æqualiter hinc inde distabit circulus ipse C*e*D a suis *polis*, si arcus A*e*, *e*B fuerint æquales.

DEFINITIO VII.

473. *Circuli in sphæra paralleli sunt illi, qui æqualiter ubique distant a se mutuo. Æqualiter autem a se mutuo distare dicuntur, cum æquales sunt arcus circulorum per unius polos transeuntium, inter ipsorum circulorum peripherias comprehensi*. Sic duo

duo circuli *abc*, *def* in ſphæra A*d*B*f* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) ſunt paralleli; quia, ſi per *polos* A, B unius *abc* ducantur circuli A*d*B*f*, A*e*B, arcus *ad*, *be*, *cf* ſunt æquales.

DEFINITIO VIII.

474. *Duo circuli in ſphæra dicuntur æqualiter diſtare ab illius centro, cum æquales ſunt recta, quæ a ſphæræ centro in centra ipſorum circulorum cadunt; ſive cum æqualiter a ſphæræ centro diſtant ipſorum diametri.* Ut ſi eadem fuerit diſtantia diametrorum AB, DE circulorum A*a*B, D*e*E (*fig.* 11. *Tab.* IV.) a centro *x* ſphæræ ADB, duo circuli A*a*B, D*e*E æqualiter diſtare dicentur a centro ipſius ſphæræ.

DEFINITIO IX.

475. *Anguli ſphærales ſunt illi, qui a peripheriis duorum maximorum circulorum ſeſe mutuo ſecantibus in ipſius ſphæræ ſuperficie producuntur.* Hujuſmodi ſunt anguli N*a*M, M*a*Q, N*a*P, P*a*Q (*fig.* 12. *Tab.* IV.) producti in ſuperficie ſphæræ MNPQ a peripheriis duorum circulorum in ipſa ſphæra maximorum N*a*Q, M*a*P. Qui autem ſint circuli in ſphæra maximi, determinabitur infra §. 491.

SCHOLION.

476. Quemadmodum anguli *rectilinei*, ita anguli *ſphærales* dividuntur in *rectos*, *acutos*, & *obtuſos*. Ut autem horum omnium diſtincta notio habeatur, obſervandum eſt, *menſuram anguli ſphæralis eſſe arcum circuli deſcripti in ſphæræ ſuperficie circa commune ſectionis punctum, tanquam centrum, inter arcus, qui angulum ipſum conſtituunt, comprehenſus.* Sic deſcripto in ſuperficie ſphæræ MNPQ (*fig.* 12. *Tab.* IV.) circa punctum *a*, in quo ſeſe mutuo ſecant periphæriæ duorum circulorum maximorum N*a*Q, M*a*P, circulo *bexz*, arcus *be* ipſius circuli contentus inter arcus M*a*, N*a*, qui angu-

angulum constituunt N*a*M, erit mensura ipsius anguli *sphæralis* N*a*M, adeo ut tot *graduum* & *minutorum* sit angulus N*a*M, quot *gradus* & *minuta* in arcu *be* numerantur. Quemadmodum ergo duæ rectæ lineæ in centro circuli sese mutuo secantes, producunt quatuor angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales (§. 129.), ita quatuor *sphærales* angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales producunt in puncto sectionis *a* peripheriæ duorum circulorum N*a*Q, M*a*P. Et sicuti omnes anguli *rectilinei* recti sunt æquales inter se (§. 126), eorumque idcirco mensura est quarta pars peripheriæ circuli ex ipsorum apice descripti, ita omnes anguli *sphærales* recti sunt æquales inter se; eosque metitur quarta pars peripheriæ circuli circa punctum sectionis in sphæræ superficie descripti. Rectus nimirum erit angulus *sphæralis* N*a*M, si arcus *eb*, qui illius est mensura, fuerit quarta pars peripheriæ totius circuli *bexz*; cumque, ut de *rectilineis* diximus, *angulus obtusus sint ille, qui major est recto; acutus vero, qui a recto deficit*, angulus quoque *sphæralis* obtusus erit ille, qui rectum superat, quique proinde habet pro mensura arcum majorem quadrante circuli; angulus vero *sphæralis* acutus is erit, qui minor est recto; atque adeo, qui hujusmodi est, ut ejus mensura sit arcus circuli minor quadraante. Ex his porro sequitur.

COROLLARIUM I.

477. *Angulus sphærales esse directe inter se, ut arcus circuli, qui angulos ipsos metiuntur*; & vicissim *hujusmodi arcus esse directe, ut ipsi anguli.*

COROLLARIUM II.

478. *Angulum sphæralem esse ad quatuor rectos sphærales, ut est arcus, qui eum metitur, ad totam circuli peripheriam*; & vicissim *arcum hujusmodi esse ad totam peripheriam, ut est ipse angulus sphæralis ad quatuor rectos.* Memoria repetantur, quæ

quæ diximus de angulis *rectilineis* §. 246, & §. 247.

DEFINITIO X.

479. *Ille circulus in sphæra maximus dicitur* rectus, *qui eosdem cum illa polos habet*. Contra vero *ille vocatur* obliquus, *cujus poli a polis ipsius sphæræ sunt diversi*. Sic in sphæra ACBD (*fig.* 10. *Tab.* IV.), cujus *poli* sint puncta A, B, *rectus* est circulus CeD; *obliquus* vero circulus MeN.

AXIOMA I.

480. *Illi arcus ejusdem, vel æqualium circulorum sunt æquales inter se, quorum chordæ sunt æquales*.

AXOMA II.

481. *Illi circuli sunt æquales inter se, quorum diametri sunt æquales. Illi vero sunt inæquales, quorum diametri sunt inæquales, adeo nimirum ut ille sit major, qui majorem habet diametrum*.

LEMMA I.

482. *Rectæ lineæ in sphæra æquales æqualiter ab illius centro distant, & quæ æqualiter ab illius centro distant, sunt æquales.* Demonstratio utriusque partis eadem est cum illa, qua hæc ipsa symptomata ostensa sunt §. 260, & §. 261. de hujusmodi rectis in circulo. Ut etenim in circulo, ita *in sphæra illæ rectæ æqualiter a centro distare dicuntur, in quas ab ipso centro æquales perpendiculares cadunt*.

LEMMA II.

483. *Diameter sphæræ, sive recta, quæ per sphæræ centrum transit, est omnium rectarum, quæ in ipsa sphæra duci possunt, maxima*, & vicissim *maxima rectarum in sphæra per illius cen-*

centrum transit. Demonstrantur eodem modo, quo §. 262, & §. 264. hæc ipsa ostensa sunt de haud dissimili recta in circulo.

L E M M A III.

484. *Recta in sphæra eo minor est, quo magis ab illius centro distat*. Ostenditur eodem modo, quo §. 263. idipsum ostensum est de hujusmodi recta in circulo.

THEOREMA I.

Si sphæra secetur plano, sectio erit circulus.

I.

485. Sphæra ACBD (*fig* 7. *Tab*. IV.) secetur plano CeD, quod per illius centrum *a* transeat. Dico, sectionem CeD esse circulum.

Demonstratio.

Etenim omnes rectæ *a*C, *ae*, *a*D ductæ a centro *a* in plano sectionis ad superficiem sphæræ, sunt inter se æquales (§. 382.). Ergo planum C*e*D est circulus (§. 239.).

I I.

486. Secetur sphæra A*be* (*fig*. 9. *Tab*. IV.) plano extra ipsius sphæræ centrum *d* transeunte, sitque sectio *bce*. Dico, hanc esse circulum.

Demonstratio.

A centro *d* sphæræ in planum sectionis *bce* cadat recta perpendicularis *da*; atque a puncto *a* in ipso plano ducantur rectæ *ab*, *ac*, nec non a centro *d* ad extrema puncta *b*, *c* rectæ *db*, *dc*. Cum igitur ex facta hypothesi anguli *dab*, *dac* triangulorum *dab*, *dac* sint recti (§. 467.), quadratum rectæ

ctæ *db* æquabit quadrata laterum *da*, *ab* simul sumta, & quadratum rectæ *dc* quadrata laterum *da*, *ac* (§. 232.). Quadrata autem rectarum *db*, *bc* sunt æqualia (§. 213.); cum ipsæ rectæ, utpote sphæræ radii, sint æquales (§. 383.): Ergo etiam quadrata rectarum *da*,*ab* simul sumta erunt æqualia quadratis itidem simul sumtis rectarum *da*,*ac* (§. 24). Quamobrem, sublato quadrato communis rectæ *da*, quadratum rectæ *ab* erit æquale quadrato rectæ *ac* (§. 27.); ac proinde ipsæ quoque rectæ *ab*, *ac* erunt æquales (§. 232.). Eodem modo ostendam, omnes rectas ductas a puncto *a* in plano *bce* ad curvam *bce* esse æquales inter se. Igitur planum, sive sectio *bce* est circulus (§. 239.); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

487. *Centrum circuli per sphæræ centrum transeuntis diversum non est a centro ipsius sphæræ*. Demonstravimus enim §. 485, omnes rectas ductas a puncto *a*, quod est centrum sphæræ ACBD (*fig*. 7. *Tab*. IV.), in plano circuli C*e*D esse inter se æquales. Igitur centrum *a* sphæræ est etiam centrum ipsius circuli (§. 420.). Hinc

COROLLARIUM II.

488. *Diameter circuli per sphæræ centrum transeuntis non est diversa a diametro ipsius sphæræ*.

COROLLARIUM III.

489. Quoniam ex demonstratione §. 486, omnee rectæ ductæ a puncto *a* in plano circuli *bce* (*fig*. 9. *Tab*. IV.) sunt æquales inter se; ac proinde punctum *a* est centrum ipsius circuli *bce* (§. 240.), recta autem *da* ducta a centro sphæræ *d* ad punctum *a*, est plano *bce* perpendiculari, liquido apparet, *rectam ductam a centro sphæræ in planum circuli extra sphæræ centrum transeuntis, eique ad perpendiculum incumbentem, tran-*

transire per centrum ipsius circuli; ac proinde etiam vicissim *rectam transeuntem per centrum circuli in sphæra, eique insistentem ad perpendiculum, transire per centrum ipsius sphæræ*. Cumque hujusmodi recta *ab* non differat ab axe ipsius circuli (§. 466.) manifestum efficitur,

COROLLARIUM IV.

490. *Axim cujusvis circuli in sphæra transire per ipsius sphæræ centrum.*

THEOREMA II.

Circulus in sphæra, qui per illius centrum transit, est omnium maximus; & vicissim circulus in sphæra maximus per illius centrum transit.

I.

491. Circulus C*e*D (*fig.* 7. *Tab.* IV.) in sphæra ACBD transeat per illius centrum *a*. Dico, circulum C*e*D esse in ipsa sphæra maximum.

Demonstratio.

Cum enim diameter CD circuli C*e*D non sit diversa a diametro ipsius sphæræ (§. 488.), erit maxima rectarum, quæ in ipsa sphæra extra centrum duci possunt (§. 483.); atque propterea erit maxima diametrorum circulorum omnium, qui extra sphæræ centrum transeunt. Ergo circulus quoque C*e*D erit omnium illorum circulorum maximus (§. 481.).

II.

492. Vicissim vero circulus C*e*D sit maximus in sphæra ACBD. Dico, ipsum transire per illius centrum,

Demon-

Demonstratio.

Si namque circulus CeD est maximus, illius quoque diameter CD maxima erit rectarum, quæ in ipsa sphæra duci possunt. Hæc autem per ipsius sphæræ centrum transit (§.483.). Ergo circulus itidem CeD per ejusdem sphæræ centrum transeat, necesse est.

COROLLARIUM I.

493. *Centrum circuli in sphæra maximi diversum non est a centro ipsius sphæræ* (§.487.); atque adeo *omnes circuli in sphæra maximi idem centrum habent.*

COROLLARIUM II.

494. *Omnes circuli in sphæra maximi sunt æquales.* Cum enim ipsorum centrum non sit diversum a centro sphæræ (§.493.), eorum quoque diametri erunt diametri sphæræ. Hæc autem sunt omnes inter se æquales (§.383.). Ergo ipsi itidem circuli erunt æquales (§.481.).

COROLLARIUM III.

495. *Omnis circulus in sphæra maximus sphæram ipsam bifariam dividit.* Id enim aperte ex eo sequitur, quod per sphæræ centrum transeat (§.492.), ut ex §. 383. est manifestum.

COROLLARIUM IV.

496. *Omnes circuli in sphæra maximi etiam sese mutuo bifariam dividunt.* Duo enim circuli ACBD, CeD (*fig.* 7. *T.* IV.) nequeunt esse maximi in sphæra ACBD, quin idem, sit utriusque centrum *a* (§.493.); ac proinde quin illi ita sese mutuo dividant, ut communis eorum sectio, recta scilicet CD, per

per ipsorum centrum transeat. Hæc autem circulos ipsos bifariam secat (§. 241.). Ergo &c.

COROLLARIUM V.

497. *Omnis circulus in sphæra, qui per alterius polos transit, est maximus.* Sic maximus in sphæra AdBf (*fig.* 8. *Tab.* IV.) est circulus AeB, qui transit per *polos* A, B circuli *def*. Quandoquidem, cum *axis* AB circuli *def* transeat per centrum *x* ipsius sphæræ (§. 490.); neque possit circulus AeB transire per *polos* A, B, quin *axis* AB sit in plano ipsius circuli AeB, ipse quoque circulus AeB transibit per centrum *x* sphæræ; ac proinde erit in illa maximus (§. 491.).

SCHOLION.

498. Maximus itaque in sphæra est circulus, qui distantiam metitur alterius in ea circuli a suis *polis* (§. 471.).

COROLLARIUM VI.

499. *Omnes circuli, qui per polos alterius circuli in sphæra transeunt, sunt inter se æquales.* Id enim aperte ex eo sequitur, quod omnes sint in sphæra maximi (§. 494.).

THEOREMA III.

Si per polos circuli in sphæra quamplures circuli ducantur, omnes illorum arcus inter polum & peripheriam ipsius circuli comprehensi, sunt æquales.

500. Per polos A, B circuli CeD in sphæra ACBD. (*fig.* 7. *Tab.* IV.) transeant duo circuli ACBD, AeB. Dico, arcus AC, Ae, AD ipsorum circulorum, qui inter polum A, & circuli peripheriam CeD continentur, esse inter se æquales, sicuti etiam arcus BC, Be, BD.

Demonstratio.

Recta AB sit axis circuli CeD; ac proinde transeat per illius centrum *a*, ejusque plano ad perpendiculum incumbat (§. 466.). Ductis autem radiis *a*C, *ae*, *a*D, jungantur puncta A, C, A, *e*, A, D rectis AC, A*e*, AD. Igitur, quoniam rectæ *a*C, ae, *a*D sunt æquales (§. 241.), sicuti etiam anguli A*a*C, A*ae*, A*a*D (§. 126.), utpote recti ex hypothesi, & recta A*a* sit communis omnibus triangulis A*a*C, A*ae*, A*a*D, rectæ sive bases AC, A*e*, AD ipsorum triangulorum erunt æquales (§. 195.) Sunt autem chordæ circulorum æqualium ACBD, A*e*B (§. 499.). Ergo arcus quoque AC, A*e* AD erunt æquales (§. 480.). Eodem modo ostendentur æquales etiam arcus BC, B*e*, BD. Ita que si &c.

COROLLARIUM.

501. *Polus itaque circuli in sphæra est veluti centrum, ex quo ipsius circuli peripheria in sphæræ superficie, tamquam in plano, describitur.*

THEOREMA IV.

Omnis circulus in sphæra maximus distat a suis polis quadrante circuli maximi.

502. In sphæra ACBD (*fig.* 10. *Tab.* IV.). esto circulus maximus Ce*D*a, cujus *poli* sint puncta A, B. Dico, distantiam ipsius circuli ab utroque *polo* quadrantem æquare circuli maximi.

Demonstratio.

Per *polos* A, B transeat circulus A*e*B*a*. Cum igitur is sit maximus (§. 497.), & bifariam a circulo C*e*D*a* dividatur (§. 496.), portio *e*A*a* erit semicirculus. Arcus autem A*e*, A*a*, qui distantiam metiuntur ipsius circuli a *polo* A, sunt æqua-

æquales (§. 500.). Ergo uterque eſt quadrans circuli. Eodem modo oſtendam, utrumque arcum B*e*, B*a*, qui metiuntur diſtantiam ejuſdem circuli ab altero *polo* B, eſſe quadranti æqualem. Igitur &c.

COROLLARIUM.

503. *Omnis idcirco circulus in ſphæra maximus æqualiter hinc inde diſtat a ſuis polis* (§. 472.).

THEOREMA V.

Si tres circuli in ſphæra maximi ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecuerint, puncta ſectionum erunt illorum poli reſpective.

504. In ſphæra ACBD (*fig.* 10. *Tab.* IV.) ſint tres circuli maximi ACBD, A*e*B*a*, C*e*D*a*, qui ſeſe mutuo dividant ad angulos rectos. Dico, puncta ſectionum A, B eſſe *polos* circuli C*e*D*a*, puncta *e*, *a* eſſe *polos* circuli ACBD, & puncta C, D eſſe *polos* circuli A*e*B*a*.

Demonſtratio.

Cum enim anguli ſphærales C*e*A, A*e*D, D*e*B, B*e*C ſint recti, adeoque æquales inter ſe, circulus ACBD diviſus erit in quatuor quadrantes in punctis A, C, B, D (§. 477.). Eadem ratione diviſus erit in quatuor quadrantes in punctis A, *e*, B, *a* circulus A*e*B*a*, ſicuti etiam circulus C*e*D*a* in punctis C, *e*, D, *a*. Quilibet autem circulus in ſphæra maximus diſtat a ſuis *polis* quadrante circuli maximi (§. 502). Ergo puncta A, B erunt *poli* circuli C*e*D*a*, puncta *a*, *e* *poli* circuli ACBD, & puncta C, D *poli* circuli A*e*B*a*.

THEOREMA VI.

Circuli in ſphæra æquales æqualiter ab illius centro diſtant, & qui æqualiter ab illius centro diſtant, ſunt æquales.

I.

505. In ſphæra ADB (*fig.* 11. T*ab.* IV.) ſint duo æquales circuli A*a*B, D*e*E. Dico, eos æqualiter diſtare a centro *x* ipſius ſphæræ.

Demonſtratio.

Cum enim circuli A*a*B, D*e*E ſint æquales, æquales erunt eorum diametri AB, DE (§. 481.). Rectæ autem AB, DE nequeunt eſſe æquales, quin æqualiter diſtent a centro *x* ſphæræ (§. 482.). Ergo æqualiter quoque ab ipſo centro diſtant circuli A*a*B, D*e*E (§. 474.).

II.

506. Viciſſim vero duo circuli A*a*B, D*e*E æqualiter diſtent a centro *x* ſphæræ ADB. Dico, eos eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Stante ſiquidem hypotheſi, æquales ſunt ipſorum circulorum diametri AB, DE (§. 482.). Ergo ipſi quoque circuli ſunt æquales (§. 481.).

THEOREMA VII.

Circuli in ſphæra eo minores ſunt, quo magis ab illius centro diſtant.

507. In ſphæra A*d*B*f* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) duo ſpectentur circuli *def*, *abc*, quorum *abc* magis, quam alter *def*, diſtet ab

ab ipsius sphæræ centro *x*. Dico, circulum *abc* minorem esse circulo *def*.

Demonstratio.

Diameter namque *ac* circuli *abc*, utpote quæ magis distat a centro *x*, est minor diametro *df* circuli *def* (§. 484.). Ergo circulus *abc* minor itidem est circulo *def* (§. 481.).

THEOREMA VIII.

Circuli in sphæra paralleli eosdem polos habent, & vicissim, qui habent eosdem polos, sunt paralleli.

I.

508. In sphæra A*d*B*f* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) sint duo circuli paralleli *abc*, *def*, sintque puncta A, B *poli* circuli *abc*. Dico, puncta A, B esse *polos* etiam circuli *def*.

Demonstratio.

Ductis per *polos* A, B circulis A*d*B*f*, A*e*B, cum ob hypothesim arcus A*a*, A*b*, A*c* sint æquales (§. 500.), sicuti etiam arcus *ad*, *be*, *cf*, (§. 473.), arcus quoque A*d*, A*e*, A*f* erunt æquales (§. 26.). Igitur punctum A erit *polus* etiam circuli *def* (§. 501.). Eodem modo ratiocinare etiam de *polo* B.

II.

509. Vicissim vero puncta A, B sint *poli* utriusque circuli *abc*, *def*. Dico; circulos *abc*, *def* esse parallelos.

Demonstratio.

Ductis namque circulis A*d*B*f*, A*e*B per ipsos *polos*, cum tam arcus A*d*, A*e*, A*f*, quam arcus A*a*, A*b*, A*c*, sint æquales inter se (§. 500.), sublatis æqualibus A*a*, A*b*, A*c*,

reliqui *ad*, *be*, *ef* erunt æquales (§. 27.). Igitur circuli *abc*, *def* ſunt paralleli (§. 473.).

COROLLARIUM I.

510. *Circuli in ſphæra paralleli eundem axim habent*; & viciſſim, *qui habent eundem axim, ſunt paralleli*. Non enim *iidem* poſſunt eſſe omnium *poli*, quin idem ſit omnium *axis*, neque poteſt eſſe idem *axis*, quin idem itidem ſint omnium *poli* (§. 468.).

COROLLARIUM II.

511. *Illi omnes circuli in ſphæra ſunt paralleli inter ſe, quorum poli diverſi non ſunt a polis ipſius ſphæræ*. Omnes enim hoc ipſo habent eoſdem *polos*.

THEOREMA IX.

Arcus circulorum parallelorum in ſphæra, inter peripherias circulorum maximorum per illorum polos tranſeuntium comprehenſi, ſunt ſibi mutuo ſimiles.

512. In ſphæra AdBf (*fig.* 8. *Tab.* IV.) ſint duo circuli paralleli *abc*, *def*, per quorum *polos* A, B tranſeant duo circuli maximi AdB*f*, A*e*B. Dico, arcus *ab*, *de*, quos intercipiunt ſemiperipheriæ A*d*B, A*e*B, eſſe ſibi mutuo ſimiles.

Demonſtratio.

Tam arcus *ab* eſt ad totam ſui circuli peripheriam *abc*, quam arcus *de* ad totam peripheriam ſui circuli *def*, ut ſe habet angulus ſphæralis *d*A*e* ad quatuor rectos, qui circa *polum* A in ſphæræ ſuperficie eſſe poſſunt (§. 478.). Ergo arcus *ab*, *de* ſunt ſibi mutuo ſimiles (§. 288).

Co-

COROLLARIUM.

513. *Quot ergo* gradus *&* minuta *sunt in arcu* ab, *tot in arcu* de *numerantur*.

SECTIO SEXTA.

De sectionibus conicis, sive de ellipsi, parabola, & hyperbola.

QUemadmodum si sphæra secetur plano, illius sectio est *circulus*, ita si conus secetur plano, quod neque illius basi sit parallelum, neque per illius axim transeat, tres emergunt figuræ planæ, quarum una *ellipsis*, altera *parabola*, tertia *hyperbola* nuncupatur; omnes vero, communi vocabulo, *conicæ sectiones* dicuntur. Pauca igitur, quæque magis naturalis Philosophiæ tyronibus scitu necessaria sunt, ex plurimis eximiisque harum figurarum symptomatis, hic exhibemus, ac leviter tantum attingimus: leviter, inquam, & quidem absque ulla demonstratione. Sunt enim nimis plura, quemadmodum ex lib. XV. nostrorum *Elementorum* patet, quæ præmittenda essent, ac demonstranda, ut, quæ hoc loco a nobis indicantur, *sectionum conicarum* symptomata rigide ostenderentur.

DEFINITIO I.

514. *Diameter figuræ curva linea comprehensæ est recta quæcumque bifariam dividens omnes rectas eidem rectæ, atque adeo etiam inter se, parallelas, quæ in ipsa figura duci possunt*. Sic recta BM (*fig.* 13. *Tab.* IV.) est *diameter* figuræ ABC; quia bifariam dividit omnes rectas parallelas *ab*, *df*, AC.

DEFINITIO II.

515. *Axis figuræ est recta non solum bifariam, verum etiam ad angulos rectos, dividens omnes rectas eidem rectæ, & inter se parallelas*. Hujusmodi est recta BM in figura ABC (*fig.* 13. *Tab.* IV.); quippe bifariam, & ad rectos angulos dividit rectas parallelas *ab*, *df*, AC.

DEFINITIO III.

516. *Vertex curvæ est punctum extremum axis*. Sic punctum B est *vertex* curvæ ABC (*fig.* 13. *Tab.* IV.) utpote extremum *axis* BM.

DEFINITIO IV.

517. *Ordinatim diametro applicata dicitur quælibet illarum rectarum parallelarum, quæ ab ipsa diametro bifariam dividuntur*. Sic rectæ parallelæ *ab*, *df* (*fig.* 13. *Tab.* IV.) dicuntur diametro BM, a qua secantur bifariam, *ordinatim applicatæ*. Partes vero harum rectarum dimidiæ, scilicet *ac*, *de*, *diametro semiordinatæ* nuncupantur.

DEFINITIO V.

518. *Abscissæ*, quæ etiam *sagittæ* vocari solent, *dicuntur illæ portiones diametri, quæ inter diametri verticem & rectas ipsi diametro applicatas continentur*. Sic portio B*c* diametri BM (*fig.* 13. *Tab.* IV.) dicitur *abscissa* correspondens *ordinatæ ab*; & portio B*e* *abscissa* correspondens *ordinatæ df*.

De ellipsi.

I.

519. *Ellipsis est figura plana unica curva linea comprehensa*,

sa, in qua rectarum ad axim semiordinatarum quadrata sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus axis, illis tamen non sunt æqualia Sic figura curvilinea ACBD (*fig.* 14. *Tab.* IV.), cujus *axis* sit recta AB, & *semiordinatæ* rectæ *ab*, *cd*, erit *ellipsis*, si quadratum *cx* *semiordinatæ cd* fuerit ad quadratum *ae semiordinatæ ab*, ut est rectangulum ex A*c* in *c*B scilicet *yc*B*m*, ad rectangulum ex A*a* in *a*B, nempe *za*B*n*; verum nec quadratum *cx* adæquet rectangulum *yc*B*m*, nec quadratum *ae* rectangulum *za*B*n*.

II.

520. Hinc patet discrimen maximum *ellipseos a circulo*, cui illa affinis est. Cum enim in circulo ACBD (*fig.* 15. *Tab.* IV.) recta E*a* perpendicnlaris diametro AB sit *media* propostionalis inter partes A*a*, *a*B, & recta C*b* inter partes A*b*, *b*B diametri AB (§. 318.), quadratum rectæ E*a* æquabit rectangulum A*a*⋊*a*B & quadratum rectæ C*b* rectangulum A*b*⋊*b*B (§. 74.), ac proinde quadrata *semiordinatarum* in *circulo* nón solum sunt *directe* inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus *axis*, quemadmodum in *ellipsi*, verum etiam sunt illis *respective* æqualia, contra ac in *ellipsi* A*c*B*f* contingat; cum scilicet in ea quadrata *semiordinatarum ea*, *cb* iisdem rectangulis sint minora.

III.

521. Quamvis ergo, ut in *circulo* ACBD (*fig.* 15. *Tab.* IV.), ita in *ellipsi* A*c*B*f*, punctum medium *b axis* AB illius *centrum* dicatur, quod in utraque figura rectæ per illud transeuntes, bifariam in ipso dividantur, in *ellipsi* tamen hujusmodi rectæ, scilicet AB, *ym*, *zx*, *fc*, non sunt omnes, quemadmodum in *circulo*, æquales inter se, sed inæquales.

IV.

522. Maxima porro AB diametrorum *ellipseos* A*c*B*f* *major*

major ipsius *axis*, & minima *cf minor axis*, & quidem majori *conjugatus*, vocatur. Sicuti enim recta AB bifariam, & ad angulos rectos dividit rectam *cf*, & omnes rectas ipsi *cf* parallelas, ita recta *cf* bifariam, & ad rectos itidem angulos rectam secat AB, easque omnes rectas, quæ eidem AB sunt parallelæ. Reliquæ vero diametri *ym*, *zx* ita se habent in *ellipsi*, ut eo sint majores, quo magis *majori axi* accedunt. Verum illæ sunt æquales inter se, quę ęqualiter hinc inde ab eodem axe distant: quo fit propterea, ut in *ellipsi* binæ tantum sint diametri inter se æquales.

V.

523. *Parameter axis ellipseos est recta, tertia continuo geometrice proportionalis post utrumque axim, ducta per illius extremum, eique ad perpendiculum incumbens.* Sic recta AE (*fig.* 16. *Tab.* IV.) perpendicularis axi AB erit *parameter* axis AB, si axis AB fuerit ad axim CD, ut ipse axis CD ad rectam AE. Quadratum idcirco unius axis CD erit æquale rectangulo AM contento sub altero axe AB, ejusque *parametro* AE. Quoniam vero, ducta ab extremo puncto E *parametri* AE ad extremum B axis AB recta EB, quadratum cujusvis *semiordinatæ ab* adæquat rectangulum contentum sub *abcissa* A*a*, & sub recta *a*F intercepta inter ipsum axim AB, & rectam EB; deficitque hoc rectangulum, scilicet A*a*FH, a rectangulo A*a*KE, quod sub eadem *abscissa* A*a*, & sub *parametro* AE continetur, figura ACBD, propter hujusmodi defectum, *ellipsis* sive *deficiens* dicta est.

VI.

524. *Foci ellipseos*, qui illius etiam *umblici* vocantur, *sunt duo puncta sumta in majori axe ex æquo hinc inde remota a centro, atque adeo etiam a suo vertice respective, quorum distantia ab extremo minoris axis majorem ellipseos semiaxim adæquat.* Videlicet duo puncta *a*, *e* (*fig.* 16. *Tab.* IV.), sumta

sumta in axe majori AB *ellipseos* ACBD, remota ex æquo a centro N, ac proinde etiam a suo vertice *respective*, erunt *foci* seu *umblici* ipsius *ellipsis* ACBD, si utraque rectarum *a*C, *e*C, quæ cadunt ex illis punctis in puctum extremum C minoris axis CD, fuerit æqualis majori semiaxi AN. Ea porro est distantia utriusque *foci* a suo vertice *respective*, nimirum *foci a* a vertice A, ut *semiordinata* ab illis ducta, scilicet *semiordinata ab*, *semiparametrum* Az adæquet.

VII.

525. Verum circa *focos ellipsis* duo occurrunt observatione apprime digna. Primum est, *si ex ipsis focis ad singula puncta perimetri elliptici inclinentur duæ rectæ, earum summam æquare majorem axim*. Nimirum ductis ex focis *a*, *e* (*fig.* 16. *Tab.* IV.) ad punctum P rectis *a*P, *e*P; ad punctum C rectis *a*C, *e*C; & ad punctum Q rectis *a*Q. *e*Q, summam duarum *a*P, *e*P, sicuti etiam summam duarum *a*C. *e*C, necnon duarum *a*Q, *e*Q, æquare majorem axim AB; ac proinde hujusmodi summas etiam inter se esse æquales. Alterum vero, *æquales esse angulos a*P*n*, *e*P*m*, *quos cum recta tangente* mn *efficiunt rectæ a*P, *e*P *ductæ ex focis* a, e *ad punctum contactus* P, *quemadmodum etiam angulos a*Q*f*, *e*Q*d*, *quos constituunt in puncto contactus* Q *rectæ a*Q, *e*Q *cum recta tangente fd*.

De parabola.

I.

526. *Parabola est figura plana curva linea in se minime redeunte comprehensa, in qua semiordinatarum ad axim quadrata sunt directe inter se, ut correspendentes abscissæ*. Esto figura plana curva linea BAC (*fig.* 17. *Tab.* IV.) comprehensa, cujus *axis* sit recta AM, *semiordinatæ* vero rectæ *ab*, *cd*, quæ sic se habeant, ut quadratum *ae semi-*

ordi-

ordinatæ ab ſit ad quadratum *cf ſemiordinatæ cd*, ut eſt *abſciſſa* A*a* ad *abſciſſam* A*c*, figura hujuſmodi erit *parabola*; & curva BAC *parabolica* nuncupatur.

II.

527. Hinc *ſemiordinatæ ad axim in parabola ſunt in ratione ſubduplicata abſciſſarum; abſciſſæ vero in ratione ſemiordinatarum duplicata*. Cum enim quadratum *cf ſemiordinatæ cd* (*fig.* 17. *Tab.* IV.) ſit ad quadratum *ae ſemiordinatæ ab*, ut *abciſſa* A*c* ad *abſciſſam* A*a*, ſicuti *ſemiordinata cd* eſt ad *ſemiordinatam ab* in ratione *ſubduplicata* quadratorum *cf*, *ae* (§. 344.), ita ipſæ *ſemiordinatæ* erunt quoque in *ſubduplicata* ratione *abſciſſarum* A*c*, A*a*; & viciſſim ſicuti quadratum *cf* eſt ad quadratum *ae* in *duplicata* ratione *ſemiordinatarum cd*, *ab* (§. 345.), in eadem ratione erunt itidem iter ſe correſpondentes *abſciſſæ* A*c*, A*a*.

III.

528. *Parameter parabolæ eſt recta continuo geometrice proportionalis poſt quamlibet abſciſſam, eique correſpondentem ſemiordinatam ad axim, ducta ex vertice axis, atque illi ad perpendiculum incumbens*. Recta nimirum perpendicularis AD (*fig.* 17. *Tab.* IV.) ducta ex vertice axis AM erit *parameter* parabolæ BAC, ſi *abciſſa* A*a* fuerit ad *ſemiordinatam ab*, ut eſt ipſa *ab* ad rectam AD. Hinc in *parabola quadratum cujuslibet ſemiordinatæ adæquat rectangulum contentum ſub parametro, & ſub correſpondente abſciſſa*. Sic quadratum *ae ſemiordinatæ ab* erit æquale rectangulo A*a*xD (§. 74.); & ob hanc æqualitatem figura hujuſmodi dicta eſt *parabola*.

IV.

529. *Focus, ſive umbilicus parabolæ eſt punctum ſumtum in illius axe, cujus diſtantia a vertice quartam parametri partem adæ-*

adæquat. Sic punctum *a* axis AM (*fig.* 17. *Tab.* IV.) erit *focus parabolæ* BAC, si ipsius puncti distantia A*a* a vertice A fuerit æqualis quartæ parti AF *parametri* AD. Porro, ut in *ellipsi*, ita in *parabola*, recta *semiordinata ab* ducta ex *foco* adæquat *semiparametrum*; & si ad quodvis punctum E curvæ *parabolicæ* BAC ducatur recta *m*E axi AM parallela, & ab eodem puncto E ad *focum a* recta E*a*, anguli *m*E*n*, *a*E*z*, quos cum recta *nz* *parabolicam* curvam tangente in puncto E, ipsæ rectæ *m*E, *a*E constituunt, erunt æquales.

De hyperbola.

I.

530. *Hyperbola est figura plana curva linea in se minime redeunte comprehensa, in qua semiordinatarum ad axim quadrata sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus abscissis, & sub recta composita ex ipsis abscissis, & ex altera recta certæ magnitudinis axi in directum adjecta*. Spectetur figura ABC curva ABC comprehensa (*fig.* 18. *Tab.* IV.), cujus axis sit recta B*c*, eique adjecta sit in directum recta BD determinatæ quantitatis. *Semiordinatæ* ad axim sint rectæ *ab*, *cd*. Figura itaque ABC erit *hyperbola*, si quadratum *semiordinatæ ab* fuerit ad quadratum *semiordinatæ cd*, ut rectangulum ex DB+B*a* in *abscissam* B*a* ad rectangulum ex DB+B*c* in *abscissam* B*c*. Recta DB dicitur *axis transversus hyperbolæ*; illius vero *centrum* punctum medium N.

I I.

531. *Parameter hyperbolæ est recta ducta ad perpendiculum ex vertice axis, cujus ratio ad axim transversum eadem est cum illa, quam habet quadratum cujuslibet semiordinatæ ad rectangulum contentum sub correspondente abscissa, & sub recta composita ex eadem abscissa, & ex axe transverso*. Sic recta BP (*fig.* 18. *Tab.* IV.) perpendicularis axi B*c* erit *parameter hy-*

per-

perbolæ ABC, si ipsa BP fuerit ad *axim transversum* BD, ut quadratum cujuslibet *semiordinatæ ab* ad rectangulum ex DB + Aa in B*a*.

III.

532. Quoniam vero, ducta ex extremo D (*fig.* 18. *T*. IV.) *transversi axis* DB per extremum *parametri* punctum P recta DQ, atque ad eam usque producta quavis *semiordinata ab*, quadratum cujuslibet *semiordinatæ ab* adæquat rectangulum ex *abscissa* B*a* in rectam *az*, rectangulum scilicet B*azx*, quod excedit rectangulum B*ae*P ex eadem *abscissa* in *parametrum* BP quantitate rectanguli P*ezx*, propter hunc excessum quadrati cujuslibet *semiordinatæ* super rectangulum ex *parametro* in *sagittam*, figura ABC nomen *hyperbolæ*, quod *excessum* sonat, obtinuit.

IV.

533. Quemadmodum in *ellipsi*, ita in *hyperbola*, *axis conjugatus est recta linea per centrum transiens ad angulos rectos, bifariam in illo divisa, media geometrice proportionalis inter axim transversum, ejusque parametrum*. Sic recta *mn* (*fig.* 18. *Tab*. IV.) transiens ad angulos rectos per centrum N *hyperbolæ* ABC, atque in illo bifariam divisa, erit *axis conjugatus* ipsius *hyperbolæ*, si fuerit media geometrice proportionalis inter *axim transversum* DB, ejusque *parametrum* BP.

V.

534. *Foci* sive *umblici hyperbolæ sunt duo puncta sumta in axe, ita hinc inde remota a suo vertice, ut rectangulum contentum sub correspondente abscissa, & sub recta composita ex ipsa abscissa, & ex axe transverso sit æquale quadrato semiaxis conjugati*. Sic puncta *a*, *b* (*fig.* 19. *Tab*. IV.) sumta in axe *hyperbolæ* AC, cujus *axis transversus* sit recta DA, *semiaxis conjuga-*

juga-

jugatus recta *mn*, erunt *foci* ipsius *hyperbolæ*, si rectangulum ex A*a* in DA + A*a*, sicuti etiam rectangulum ex D*b* in AD+D*b*, fuerit æquale quadrato *semiaxis* conjugati *mn*. Æqualiter idcirco distant *foci hyperbolæ* tum ab illius centro *m*, tum a suo vertice A, D *respective*; tantaque est utriusque distantia a centro *m*, ut rectam adæquet D*n* ductam ab extremo *n semiaxis conjugati mn* ad verticem D. Insuper *semiordinata ax* ducta a *foco a* est æqualis *semiparametro* ipsius *hyperbolæ*, quemadmodum diximus de *semiordinata* ducta a *foco ellipseos*, & *parabolæ*. At demum, si ad quodvis punctum C curvæ *hyperbolicæ* A*x*C ex *focis*, *a b* ducantur rectæ *b*C, *a*C, & per idem punctum C recta tangens *de*, anguli *a*C*d*, *d*C*b* sunt æquales.

VI.

535. Postremo, si in recta FE tangente curvam *hyperbolicam* ABC in vertice B (*fig.* 20. *Tab.* IV.) sumantur hinc inde ab ipso vertice partes BF, BE, quarum utraque sit æqualis semidiametro conjugatæ; tum a centro D per extrema F, E ducantur rectæ indefinitæ D*n*, D*x*, hæ ad curvam *hyperbolicam* ABC continuo accedent, nunquam tamen cum illa convenient. Videlicet, ductis rectis *dm*, *nx* &c. parallelis tangenti FE, continuo decrescunt segmenta *da*, *nc*, sicuti etiam *bm*, *ex*, at numquam in nihilum abeunt. Hujusmodi itaque rectæ continuo ad curvam *hyperbolicam* accedentes, & numqam cum illa concurrentes, *asymptoti hyperbolæ* dici solent.

FINIS.

NOI

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

COncedemo Licenza a Giammaria Rizzardi Stampatore di Brescia di poter ristampare il Libro intitolato: *Elementa Matheseos ad Mechanicam Philosophiam in privatis Scholis tradendam &c. accommodata*, *Auctore P. F. Fortunato a Brixia &c.* osservando gli Ordini soliti in materia di Stampe, e presentando le Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova. Dat. li 14. Settembre 1756.

(
(*Barbon Morosini Cav. Proc. Rif.*
(*Alvise Mocenigo 4.° Cav. Proc. Rif.*

Regist. in Libro a car. 49. al num. 491.

Giacomo Zuccato Segret.